Югорский физико-математический лицей

В.П. Чуваков

Делимость целых чисел в задачах

Сборник задач

Ханты-Мансийск
2015

Делимость целых чисел в задачах: Сборник задач, - Ханты-Мансийск, Югорский физико-математический лицей,
39 с.

Составитель: В.П. Чуваков

В сборнике собраны задачи по на делимость целых чисел различной степени сложности, которые встречались на предметных и вузовских олимпиадах по математике, ЕГЭ. Для решения большинства задач необходимо иметь системные знания, часто выходящие за пределы стандартной школьной программы.

Приведены ответы к задачам и комментарии к решениям.

Представленные задачи рассматривались на факультативе по решению задач повышенной сложности для 11 класса лицея.

Пособие предназначено для углубленного изучения математики, подготовки к предметным и вузовским олимпиадам, ЕГЭ.

Адресовано школьникам старших классов и преподавателям.

1. **Общие свойства делимости, алгебраическое представление натуральных чисел,**

1.1. Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a и b таких что, если к десятичной записи числа a приписать справа через запятую десятичную запись числа b, то получится десятичная запись числа $\frac{b}{a}$.

1.2. Найдите все пары пятизначных чисел (x, y) такие, что число $\overline{xy}$, полученное приписыванием десятичной записи числа y после десятичной записи числа x, делится на xy.

1.3. Найдите пятизначное число, произведение которого с числом 9 есть пятизначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

1.4. Найдите наименьшее натуральное число, первая цифра которого 1, а ее перестановка в конец числа приводит к увеличению числа в три раза.

1.5. Найдите шестизначное число, которое уменьшается в 6 раз, если три его первые цифры, не меняя порядка, переставить в конец числа.

1.6. Найдите все натуральные числа, первая цифра которых 6, а при зачеркивании этой цифры число уменьшаются в 25 раз.

1.7. Найдите произведение двух трехзначных чисел, если оно втрое меньше шестизначного числа, полученного приписыванием одного из этих двух чисел вслед за другим.

1.8. Найдите все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющие равенству $a^b + 127 = \overline{ab}$.

1.9. Найдите все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющие равенству $a^b + 320 = \overline{ab9}$.

1.10. Найдите все пары натуральных чисел a и b, такие, что если к десятичной записи полученного числа a^2 приписать справа десятичную запись числа b, то получится число, большее произведения $a \cdot b$ в три раза.

1.11. Найдите все пары натуральных чисел a и b, такие, что если к десятичной записи числа a приписать справа десятичную запись числа b^2, то получится число, большее произведения $a \cdot b$ ровно в семь раз.

1.12. Известно, что числа $\overline{ab71}$ и $\overline{b71a}$ делятся на простое трехзначное число p. Найдите числа p, a, b.

1.13. Найдите хотя бы три десятичных числа, делящихся на 11, в записи которых используются все цифры от 0 до 9?

1.14. Найдите наибольшее натуральное число, из которого вычеркиванием цифр нельзя получить число, делящееся на 11.

1.15. При каком наименьшем натуральном n число $2009!$ не делится на n^n?

1.16. Найдите наибольшее натуральное n, для которого каждое из чисел k^k при $k = 1, 2, \ldots n$ является делителем числа $2013!$.

1.17. Найдите наибольшее натуральное число n, для которого число $2009!$ делится на каждое из чисел k^k при $k = 1,2,3...n$.

1.18. Найдите все натуральные числа n, при которых выражение $n^2 + 5n + 16$ делится на 169.

1.19. Докажите, что для всех натуральных n выражение $n^2 + 3n + 5$ не делится на 121.

1.20. Найдите все натуральные числа, меньшие 10^5, которые делятся на 1999 и сумма цифр которых равна 25.

1.21. Найдите все трехзначные числа, которые в 5 раз больше произведения своих цифр.

1.22. Даны натуральные числа M и N больше десяти, состоящие из одинакового количества цифр такие, что $M = 3N$. Чтобы получить число M, надо в числе N к одной из цифр прибавить 2, а к каждой из оставшихся прибавить по нечетной цифре. а) Приведите пример такого числа; б) Может ли число N оканчиваться цифрой 1; в) Какой цифрой может оканчиваться число N?

1.23. Известно, что сумма цифр натурального числа N равна 100, а сумма цифр числа $5N$ равна 50. а) Может ли число N оканчиваться на 1; б) Докажите, что N четно.

1.24. Даны два трехзначных натуральных числа. Известно, что их произведение в N раз меньше шестизначного числа, полученного приписыванием одного вслед за другим. а) Может ли N

равняться 2? б) Может ли N равняться 3? в) Какое наибольшее значение может принимать N?

1.25. Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр можно получить другую степень двойки?

1.26. Найдите все натуральные числа, являющиеся степенью двойки, такие, что после зачеркивания первой цифры их десятичной записи снова получается число, являющееся степенью двойки.

1.27. Найдите наибольшее число, являющееся полным квадратом, которое после вычеркивания двух последних цифр снова превращается в полный квадрат.

1.28. Найдите все натуральные числа, большие 9, которые являются полным квадратом, а десятичная запись которых состоит из различных цифр одной четности.

Ответы к главе 1:

1.1. $a=2, b=5$/ **1.2.** $x=16667, y=33334$/ **1.3**. 10989/ **1.4**. 142857/ **1.5.** 857142/ **1.6.** $n=625\cdot 10^{k-2}$/ **1.7.** 55778/ **1.8.** $a=1, b=28; a=14, b=1$/ **1.9.** $a=3, b=2; a=97, b=2$/

1.10. $a=1, b=5\cdot 10^{k-1}$; $a=2, b=8\cdot 10^{k-1}$/ **1.11**. $a=1, b=2$/

1.12. $p=101, a=7, b=1$/ 1.**13**. $9576843210, 9873546210, 9876513240$/

1.14. 987654321/ **1.15.** 47/ **1.16**. 46/ **1.17.** 46/ **1.18**.Таких чисел нет/

1.20. $n=k=m=2, p=3$/ **1.21.** 175/ **1.22.** $16; 48$; нет; 6\ **1.23**. Нет/

1.24. нет; да $167, 334$; 7/ **1.25.** Нет/ **1.26**. $32, 64$/

1.27. 1681/ **1.28.** 64, 6084/

2. Разложение на простые множители, НОД, НОК

2.1. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 42 и имеют ровно 42 различных натуральных делителя (включая 1 и само число).

2.2. Найдите все натуральные числа, последняя цифра которых равна 0 и которые имеют ровно 15 различных натуральных делителей (включая 1 и само число).

2.3. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 30 и имеют ровно 99 различных натуральных делителя (включая 1 и само число).

2.4. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 5600 и имеют ровно 105 различных натуральных делителя (включая 1 и само число).

2.5. Найдите все натуральные числа n, имеющие ровно 6 натуральных делителей (включая 1 и само число), сумма которых равна 104.

2.6. Натуральное число n имеет ровно 6 натуральных делителей (включая 1 и само число), сумма которых равна 3500. Найдите n.

2.7. Натуральное число n имеет ровно 9 натуральных делителей (включая 1 и само число), сумма которых равна 1767. Найдите n.

2.8. Найдите все натуральные числа, имеющие ровно шесть натуральных делителей, сумма которых равна 3528.

2.9. Найдите все натуральные числа, которые равны квадрату числа своих делителей

2.10. Произведение нескольких различных простых чисел делится на каждое из этих чисел, уменьшенное на 1. Чему может быть равно это произведение?

2.11. Множество A состоит их n натуральных чисел $(n>7)$. Наименьшее общее кратное всех чисел равно 210, а *НОД* любых двух чисел из A больше единицы. Найдите эти числа, если произведение всех чисел из множества A делится на 1920 и не является квадратом никакого натурального числа.

2.12. Найдите все натуральные n, при которых дробь $\dfrac{7n^2+11n+4}{6n^2+5n}$ сократима.

2.13. При каких натуральных n существует хотя бы одно рациональное число x, удовлетворяющее равенству $n^2+1=(2n-1)^x$?

2.14. При каких натуральных n существует хотя бы одно рациональное число x, удовлетворяющее условию $n^2+4=(2n+3)^x$?

Ответы к главе 2:

2.1. $2^1 3^2 7^6$; $3^1 2^2 7^6$; $2^1 7^2 3^6$; $3^1 7^2 2^6$; $7^1 3^2 2^6$; $7^1 2^2 3^6$ /

2.2. $2500; 400$/ **2.3.** $2^2 3^2 5^{10}$; $2^2 3^{10} 5^2$; $2^{10} 3^2 5^2$ /

2.4. $2^6 5^4 7^2$; $2^6 5^2 7^4$ / **2.5.** 63/ **2.6.** 1996/ **2.7.** 1225/ **2.8.** 2012/

2.9. 9/ **2.10.** $6; 42; 1806$/ **2.11.** $2; 6; 10; 14; 30; 42; 70; 210$/

2.12. $n=2p$; $n=11p+1$/ **2.13.** $n=5$/ **2.14.** $n=1$; $n=11$/

3. Уравнения в целых числах

3.1. Решите в натуральных числах уравнение $1+2!+3!\ldots+n!=k^2$.

3.2. Решите в натуральных числах уравнение $13+5n+n!=k^2$.

3.3. Решите в натуральных числах уравнение $n!+4n-9=k^2$.

3.4. Решите в натуральных числах уравнение $12\,n!+11^n+2=k^2$.

3.5. Решите в целых числах уравнение $1+2^k+2^{2k+1}=n^2$.

3.6. Решите в натуральных числах уравнение $2xy=x^2+2y$.

3.7. Решите в целых числах уравнение $m^4-2n^2=1$.

3.8. Решите в целых числах уравнение $1+2^x=y^2$.

3.9. Решите в целых числах уравнение $3^n+8=x^2$.

3.10. Решите в целых числах уравнение $2^n+2^{2n}+2^{3n}+\ldots+2^{k\cdot n}=2006$.

3.11. Решите в целых числах уравнение $3^n+3^{2n}+3^{3n}+\ldots+3^{k\cdot n}=2007$.

3.12. Решите в натуральных числах уравнение $xy=13(x+y)$.

3.13. Решите в натуральных числах уравнение $xy=17(x+y)$.

3.14. Решите в натуральных числах уравнение $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{25}$, где $m>n$.

3.15. Решите в целых числах уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{9}$ $(x>y)$.

3.16. Решите в целых числах уравнение $x!+y!=10z+13$.

3.17. Решите в целых числах уравнение $x!+y!=10z+17$.

3.18. Решите в натуральных числах уравнение $x!+y!=(x+y)!$.

3.19. Решите в натуральных числах уравнение $5\cdot k!=m!-n!$.

3.20. Решите в натуральных числах уравнение $k!=3\cdot m!+6\cdot n!$.

3.21. Решите в натуральных числах уравнение $n!+k!+m!=p!$.

3.22. Решите в натуральных числах уравнение $k!=5\cdot m!+12\cdot n!$.

3.23. Решите в натуральных числах уравнение $k!=2\cdot m!-7\cdot n!$.

3.24. Решите в натуральных числах уравнение $y^2=16+z^x$, где $z-$ простое число.

3.25. Решите в натуральных числах уравнение $n^5+n^4=7^m-1$

3.26. Решите в целых числах уравнение $m\cdot n^2=10^5\cdot n+m$.

3.27. Решите в целых числах уравнение $3^m+4^n=5^k$.

3.28. Решите в натуральных числах уравнение $3^m+7=2^n$.

2.29. Решите в натуральных числах уравнение $3\cdot 2^m+1=n^2$.

3.30. Решите в натуральных числах уравнение $2^m-3^n=1$.

3.31. Решите в натуральных числах уравнение $3^n - 2^m = 1$.

Ответы к главе 3:

3.1. $n = k = 3/$ **3.2.** $n = 2, k = 5/$ 3.3. $n = 2, k = 1;\ n = 3, k = 3/$

3.4. $n = 1, k = 5/$ **3.5.** $k = 0,\ n = \pm 2;\ k = 4,\ n = \pm 23/$ **3.6**. $x = 4, y = 8/$

3.7. $n = 0, m = \pm 1/$ **3.8**. $(3;3), (3;-3)/$ **3.9.** $n = 0, x = \pm 3/$

3.10. $n = 0, k = 2006/$ **3.11**. $n = 0, k = 200$

3.12. $(182;14),\ (26;26)/$ 3.13. $(306;18),\ (34;34)/$

3.14. $m = 150, n = 30, m = 650, n = 26/$

3.15. $(32;12),\ (90;10),\ (8;-72),\ (6;-18), (-72;8), (-18;6)/$

3.16. $x = 1, y = 2, z = -1; x = 2, y = 1, z = -1/$

3.17. $x = 1, y = 3, z = -1;\ x = 3, y = 1,\ z = -1/$ **3.18.** $x = 1, y = 1/$

3.19. $m = 3, k = n = 1;\ m = 6, k = n = 5/$

23.20. $m = 3, k = 4, n = 1;\ m = 8, k = 9, n = 8/$ **3.21.** $n = k = m = 2, p = 3/$

3.22. $k = 17, n = m = 16;\ n = 5, k = 7, m = 6.$

3.23. $k = n = 3, m = 4;\ k = m = 7, n = 6/$ **3.24**. $(7;12;2),\ (2;\ 5;3)/$

3.25. $n = m = 2/$ **3.26**. $n = 3,\ m = 37500;\ n = 9, m = 11250/$

3.27. $m = n = k = 2/$ **3.28**. $n = 4, m = 2/$ 2. $2/$ **3.29**. $85/$ **3.30.** $n = 1, m = 2/$

3.31. $n = 1, m = 12;\ n = 2, m = 3/$

4. Задачи на другие темы

4.1. Все правильные несократимые дроби с двузначными числами в числителе и знаменателе упорядочили по возрастанию. Между какими двумя последовательными дробями оказалось число $\frac{5}{8}$?

4.2. Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенными между числами $96/35$ и $97/36$ найдите такую, знаменатель которой минимален.

4.3. Найдите две последние цифры числа 11^{10}.

4.4. Найдите последнюю цифру числа 2^{3^4}.

4.5. Найдите две последние цифры числа 2^{999}.

4.6. Докажите, что число $\underbrace{11....1}_{2n}-\underbrace{22...2}_{n}$ является полным квадратом.

4.7. Докажите, что число $\underbrace{11...1}_{100}\underbrace{55...56}_{100}$ является полным квадратом.

4.8. Докажите, что число $(10^n+10^{n-1}+...+10)(10^{n+1}+5)+1$ является полным квадратом.

4.9. Докажите, что $\underbrace{33...3}_{n}{}^2=\underbrace{11...1}_{n}0\underbrace{88...89}_{n}$

4.10. Докажите, что $\underbrace{33...34}_{n}{}^2=\underbrace{11...1}_{n+1}\underbrace{55...56}_{n}$

4.11. Докажите, что числа $10017, 100117, 1001117, \ldots$ делятся на 53.

4.12. Докажите, что число $\underbrace{11...1}_{n}2\underbrace{11...1}_{n}$ - составное.

4.13. Докажите, что число $\sqrt{\underbrace{44...4}_{1980}-11\cdot\underbrace{44...4}_{990}+9}$ – целое.

4.14. Докажите, что число $\underbrace{11...1}_{100}\underbrace{22...2}_{100}$ является произведением двух последовательных натуральных чисел.

4.15. Докажите, что число $2^{\overbrace{11...1}^{100}\overbrace{22...2}^{100}}+1$ составное.

4.16. Найдите наибольшую сумму значений параметров a и b, если известно, что числа $a, a\cdot b, \overline{ab}+2b^2-b-20, \overline{ba}+2b^3-10b-2$ образуют геометрическую прогрессию, причем $\overline{ab}+\overline{ba}$ – квадрат натурального числа.

4.17. Найдите наименьшую сумму значений параметров a и b, если известно, что числа $2a+2,\ 3b-3,\ \overline{ab}+2b^2-7-2a,\ \overline{ba}+2+5a-6b$ образуют арифметическую прогрессию, причем $\overline{ab}-\overline{ba}$ – квадрат натурального числа и $a\neq 0$.

4.18. Найдите наименьшую сумму значений параметров a и b, если известно, что числа $b,\ ab,\ \overline{ba}+a^2-a-20,\ \overline{ab}-2$ образуют геометрической прогрессию, причем $b>0$.

4.19. Найдите сумму квадратов всех значений параметров a и b, если известно, что числа $2a,\ 3b,\ \overline{ab}-2a,\ \overline{ba}+5a-6b$ образуют арифметическую прогрессию, причем $\overline{ab}-\overline{ba}$ – квадрат натурального числа.

4.20. Найдите все натуральные числа a такие, что сумма цифр числа a и сумма цифр числа $a+1$ делятся на 4. Укажите наименьшее из этих чисел.

4.21. Найдите все натуральные числа a такие, что сумма цифр числа a и сумма цифр числа $a+1$ делятся на 5. Укажите наибольшее шестизначное число такого вида.

4.22. Сумма первых четырнадцати членов арифметической прогрессии равна 77. Известно, что ее первый и одиннадцатый члены натуральные числа. Чему равен восемнадцатый член прогрессии?

4.23. Числа 54 и 128 являются членами некоторой геометрической прогрессии. Найдите все натуральные числа, которые встречаются в этой геометрической прогрессии.

4.24. Числа 24 и 2187 являются членами некоторой геометрической прогрессии. Найдите все натуральные числа, которые встречаются в этой геометрической прогрессии.

4.25. Докажите, что если в числе 12008 между нулями вставить любое количество троек, то получится число, делящееся на 19.

Ответы к главе 4:

4.1. $\frac{58}{93}<\frac{5}{8}<\frac{62}{99}$ / **4.2.** $\frac{19}{7}$ / **4.3.** 01/ **4.4.** 2/ **4.5.** 88/ **4.6.** $(\underbrace{33\ldots3}_{n})^2$ /

4.7. $(\underbrace{33\ldots3}_{99}4)^2$ / **4.8.** $(\underbrace{33\ldots3}_{n}4)^2$ / **4.16.** 11/ 4.18. 987654321/

4.19. $n=2,\ m=2$/ **4.20.** 1399999/ **4.21.** 909999/

4.22. -5/ **4.23.** $54, 72, 96, 128$/ **4.24.** $24,\ 108,\ 486,\ 2187.$

Комментарии к главе 1:

1.1. Пусть b $n-$значное число. Тогда $\frac{b}{a}=a+\frac{b}{10^n}$ и $10^n(b-a^2)=ab.$ Далее, $(a,b)=1 \Rightarrow (b-a^2, ab)=1 \Rightarrow$ $b-a^2=1, ab=10^n \Rightarrow a=2^n, b=5^n \Rightarrow a=2, b=5\ (5^n-2^{2n}=1)$

1.2. $N=x\cdot 10^5+y=(xy)\cdot p \Rightarrow$ y делится на $x \Rightarrow y=x\cdot n.$ $x\cdot 10^5+x\cdot n=(x\cdot xn)\cdot p \Rightarrow 10^5+n=x\cdot n\cdot p \Rightarrow$ n делит 10^5. Так как $x,\ y-$ пятизначные числа, то $n-$цифра и $n=2,4,5,8.$

Если $n=2$, то $10^5+2=100002=2\cdot 50001=2\cdot 3\cdot 16667=2\cdot x\cdot p$. Так как все числа пятизначные, то возможен только один вариант: $x=16667, y=2x=33334.$

Если $n=4$, то $10^5+4=100004=4\cdot 25001=x\cdot 2\cdot p$. Так как числа пятизначные, то вариантов нет. Аналогично разбираются случаи $n=5,\ 8.$

1.3. Пусть $n=\overline{abcde}$, $\overline{abcde}\cdot 9=\overline{edcba}$. Так как пятизначное число при умножении на 9 остается пятизначным, то $a=1,$ а $b=0$ или $b=1.$ Если $b=0,$ то $10cde\times 9=edc01 \Rightarrow e=9 \Rightarrow$ $\Rightarrow 10cd9\times 9=9dc01 \Rightarrow 9d+8$ оканчивается на $0 \Rightarrow d=8.$ Далее $10c89\times 9=98c01 \Rightarrow 9c+8$ оканчивается на $c \Rightarrow d=7.$ Если $b=1,$ то $11cde\times 9=edc11 \Rightarrow e=9,\ 9d+8$ оканчивается на $1 \Rightarrow d=7.$ Далее, $11c79\times 997c11 \Rightarrow 9c+7$ оканчивается на c, однако таких чисел не существует.

1.4. Пусть $n=1\cdot 10^m + x,\ k=10x+1,\ k=3n \Rightarrow 7x=3\cdot 10^m-1,$ т.е. $3\cdot 10^m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 7).$ Если делить "столбиком", то можно получить, что $300000=7\times 42857+1 \Rightarrow x=42857,\ n=142857.$

1.5. Пусть $n=\overline{abcxyz}=\overline{p\,q},\ m=\overline{xyzabc}=\overline{q\,p},\ n=1000\cdot p+q.$ Тогда $1000\cdot p+q=6(1000\cdot q+p) \Rightarrow 994\cdot p=5\cdot 999\cdot q \Rightarrow 142p=857q.$ Далее, $(p,\ q)=1 \Rightarrow q=142,\ p=857.$

1.6. Пусть $n=\overline{6abc\ldots.}=6\cdot 10^k+p.$ Тогда $6\cdot 10^k+p=25p$ $6\cdot 10^k=24p \Rightarrow p=25\cdot 10^{k-2} \Rightarrow n=625\cdot 10^{k-2}.$

1.7. Пусть $a,\ b-$ трехзначные числа, $\overline{ab}=3ab \Rightarrow 1000a+b=3ab.$ Отсюда следует, что $1000a=b\cdot(3a-1)$ и $3a-1$ делитель числа $1000.$ Но $3a-1\le 300-1=299$ и $3a-1$ может быть равно 500 или $1000.$ Если $3a-1=500,$ то $a=167,\ b=2a=334,\ a\cdot b=55778.$ А уравнение $3a-1=1000$ не имеет решений в целых числах.

1.8. Пусть $a^b+127=\overline{ab}.$ Если $a=1,$ то $b=28.$ Пусть $a\ \ge 2.$ Если $b<9$ ($b-$цифра), то $a^b+127=10a+b.$ Если $b=1,$ то $a+127=10a=1.$ Отсюда, $126=9a,\ a=14.$ Если $b\ge 2,$ то $10a+b=a^b+127>a^2+127.$ Отсюда получаем неравенство $a^2-10a+118\le 0,$ которое не имеет решений в натуральных числах.
Докажем, что при $a\ge 2$ и $b>9$ задача не имеет решений.

Пусть $b-$ $n-$значное число $(10^n-1\le b<10^n),$

$a^b+127=10^n\cdot a+b.$ Тогда $a^b+127>a^{b-1}\cdot a>2^{b-1}\cdot a,$ а

$10^n+b<10^n+10^n<10^n\cdot 2a.$ Отсюда,

$2^{b-1}\cdot a<10^n\cdot 2a \Rightarrow 2^{b-1}<10^n,$ где $b-$ $n-$значное число. Однако

последнее неравенство не верно: если $b>10^{n-1},$ то $2^{b-1}>2^{10^n-2}.$

Докажем, что $2^{10^n-2} > 10^n$ при всех $n > 2$. При $n = 2$ неравенство имеет вид $2^{10^2-2} = 2^8 > 10^2$, а при переходе к $n+1$ левая часть неравенства увеличивается в 2^{90} раз, а правая – только в 10 раз.

1.10. По условию задачи $\overline{a^2 b} = 3a \cdot b$. Пусть $b -$ $n -$ значное число ($10^{n-1} \le b < 10^n$). Тогда $a^2 \cdot 10^n + b = 3ab \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 \cdot 10^n = b(3a-1) < 10^n \cdot (3a-1)$. Среди решений неравенства $a^2 - 3a + 1 < 0$ содержится только два натуральных числа $a = 1$ или $a = 2$. Если $a = 1$, то $10^n + b = 3b \Rightarrow b = 5 \cdot 10^{n-1}$. Если $a = 2$, то $4 \cdot 10^n + b = 6b \Rightarrow 4 \cdot 10^n = 5b \Rightarrow b = 8 \cdot 10^{n-1}$.

1.11. По условию задачи $\overline{a b^2} = 7a \cdot b$. Пусть $b -$ $n -$ значное число ($10^{n-1} \le b < 10^n$). Тогда $10^{2n-2} \le b^2 < 10^{2n} \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{ab^2} > a \cdot 10^{2n-1} \Rightarrow 7ab > a \cdot 10^{2n-1} \Rightarrow 10^{n+1} > 10b > 7b \ge 10^{2n-1}$.
Неравенство $10^{n+1} > 10^{2n-1}$ справедливо только при $n = 1$, т.е. $b -$ цифра и уравнение имеет вид $a \cdot 10^n + b^2 = 3ab$; $b = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; $n = 1, 2$. Если $b = 1$, то $10a + 1 = 3a \Rightarrow \varnothing$.
Если $b = 2$, то $a \cdot 10 + 4 = 14a \Rightarrow 4 \cdot a = 4 \Rightarrow a = 1$.
Легко убеждаемся, что при $b = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ уравнение $a \cdot 10^n + b^2 = 3ab$ не будет иметь решений в натуральных числах. Например, при $b = 7$ уравнение будет иметь вид $a \cdot 100 + 49 = 49a$.

1.12. $\overline{ab71} = 1000 \cdot a + \overline{b71}$, $\overline{b71a} = 10 \cdot \overline{b71} + a$. Отсюда видно, что $\overline{ab71} \cdot 10 - \overline{b71a} = 9999a = 9 \cdot 11 \cdot 101 \cdot a$. Из свойств делимости следует, что это число должно делиться на трехзначное простое число p и это может быть только число 101. Далее, $\overline{ab71} = 71 + 100 \cdot \overline{ab} = 71 - \overline{ab} + 101 \cdot \overline{ab}$. Из условия задачи следует, что число $71-\overline{ab}$ должно делиться на 101, а это возможно только в случае $71-\overline{ab}=0 \Rightarrow a=7, b=1$.

1.13. Рассмотрим число $N=9876543210$, содержащее все цифры, но не делящееся на 11. Сумма четных цифр этого числа равна 25, а сумма нечетных $-$ 20. Чтобы это число делилось на 11, надо переставить местами нечетную цифру p и четную цифру q так, чтобы $25-p+q-(20-q+p)=11$. Т.е. $q-p=3$. Это варианты $8-5, 6-3, 4-1$ и числа 9576843210, 9873546210, 9876513240. Можно начинать, например, с числа $N=1234567890$.

1.14. Пусть $N=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_2 a_1}$. В записи N не должно быть нулей или двух одинаковых цифр, в противном случае при вычеркивании остальных цифр останется число, делящееся на 11. Значит в записи N должно быть все 9 цифр, а наибольшее число такого вида $N=987654321$. Докажем, что N не делится на 11. Действительно, $9-8+7-6+5-3+3-1+1=5<11$.

1.15. Число n^n делит $2009!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2009$, если в этом произведении встречаются числа $n, 2n, 3n, 4n, \ldots, n\cdot n$. Так как $45\cdot 45=2025$, то при любом $n<45$ число n^n будет делить $2009!$. Пусть $n=45$. Тогда $45\cdot 44=1980$, поэтому 45^{44} делит $2009!$. Но $45=5\cdot 9$, поэтому 45^{45} тоже делит $2009!$. Пусть $n=46, 46\cdot 43=1978$, поэтому 46^{43} делит $2009!$. Но $46=2\cdot 23-$ составное, поэтому 46^{46} тоже делит $2009!$. Пусть $n=47-$ простое число и $47\cdot 42=1974$, поэтому 47^{42} делит $2009!$, а 47^{47} уже не делит $2009!$.

1.16. Доказательство аналогично предыдущему. Пусть $n=45$. Тогда $45\cdot 44=1980$, поэтому 45^{44} делит $2013!$. Но $45=5\cdot 9$, поэтому 45^{45} тоже делит $2013!$. Пусть $n=46, 46\cdot 43=1978$, поэтому 46^{43}

делит $2013!$. Но $46=2\cdot 23-$составное, поэтому 46^{46} тоже делит $2013!$. Пусть $n=47-$ простое число и $47\cdot 42=1974$, поэтому 47^{42} делит $2013!$, а 47^{47} уже не делит $2013!$.

1.18. Пусть исходное выражение делится на 13. Заметим, что $n^2+5n+16=(n+9)(n-4)+52$, $(n+9)-(n-4)=13$. Отсюда следует, что оба числа $n+9$, $n-4$ делятся на простое число 13. Тогда их произведение будет делиться на 169, однако число 52 не делится на 169. Противоречие. Ответ: таких чисел нет.

1.20. Искомые числа имеют вид $1999\cdot n$ $(n\le 50)$. По условия задачи сумма цифр этого числа равна 25, поэтому остаток от деления этого числа на 9 равен 7. Остаток от деления числа 1999 на 9 равен 1, поэтому остаток от деления числа n на 9 равен 7, т.е. $n=7, 16, 25, 34, 43$. Проверим все эти числа, отметив некоторые «хитрости» вычислений: $1999\cdot n=2000\cdot n-n$. Существует всего два числа такого вида, сумма цифр которых равна 25: $1999\cdot 7=14000-7=13993$; $1999\cdot 16=32000-16=31984$.

Ответ: 13993, 31984.

1.25. Выясним, какие остатки могут получиться при делении чисел вида 2^n на 9: $2, 4, 8, 7, 5, 1, 2\ldots$ Так как $2^{n+6}-2^n=2^n\cdot 63$, то остатки от деления чисел 2^{n+6} и 2^n на 9 равны. Таким образом, если два числа вида 2^n имеют одинаковые остатки при делении на 9, то они отличаются на множитель 2^{6p} и не могут быть получены друг из друга перестановкой цифр.

Ответ*: не существует.*

1.26. Пусть $2^n=a\cdot 10^k+2^m$. Если $k=1$, то $2^n=a\cdot 10+2^m$. Это два числа: $2^5=30+2$; $2^6=64=60+2^2$. Если $k=2$, то трехзначные степени двойки – это числа $128, 256, 512$, которые не являются числами требуемого вида. Если $k=3$, то четырехзначные степени двойки – это числа $1024, 2048, 4096, 8192$, которые опять не являются числами заданного вида. И так далее…

Докажем, что других чисел с таким свойством не существует. Для чисел такого вида должно выполняться равенство $2^m(2^n-1)=p\cdot 10^k$, где $k-$ количество знаков в десятичной записи степени двойки после зачеркивания первой цифры p. Число 2^n-1 делится на 5 только при $n=4k$ $(2^{4k}-1=16^k-1=(15+1)^k-1)$. Если $k=1$, то $p=2$, $p=6$, числа 32 и 64. Если $k\geq 2$, то $2^{4k}-1=(2^{2k}-1)(2^{2k}+1)$. Числа $2^{2k}-1$, $2^{2k}+1$ не делятся на 2, оба одновременно, не могут делиться на 5 и оба больше 15, однако одно из этих чисел должно делить цифру p. Но тогда равенство $2^m(2^{2k}-1)(2^{2k}+1)=p\cdot 10^k$ невозможно!

1.27. Пусть $n=p^2=\overline{k_s k_{s-1}\ldots k_2 k_1 k_0}=m^2\cdot 100+\overline{k_1 k_0}$ и число n – наибольшее с этим свойством. Справедливо неравенство $p^2\leq m^2\cdot 100+100=(10m)^2+100$. Отсюда $p^2-100<100m^2$. Так как, $(10m+1)^2=100m^2+20m+1>100m^2$ и число $p-$наибольшее с таким свойством, то $p^2\geq(10m+1)^2$. Т.е. $p^2\geq(10m+1)^2=100m^2+20m+1\Rightarrow 20m+1\leq p^2-100m^2<100\Rightarrow$ $\Rightarrow m\leq 4$. Если $m=4$, то $n=41^2=1681$. Если $m=3$, то $n\leq 1000<1681=41^2$. Ответ: $n=41^2=1681$.

1.28. Исходное число $N=k^2$ и все цифры числа N различны, Легко проверить, что при возведении в квадрат любого нечетного числа вторая цифра справа всегда будет четной, и, следовательно, все цифры исходного числа N должны быть

четными. Так как $N=k^2$ и все цифры числа N различны, то последней цифрой числа N могут быть только 4 или 6:
- на 2 и 8 не оканчиваются квадраты чисел;
- если последняя цифра квадрата числа равна 0, то предпоследняя тоже равна 0.

Если последняя цифра числа N равна 6, то число k оканчивается на 4 либо на 6, однако при возведении в квадрат чисел вида $p6$ или $p4$ вторая цифра справа всегда будет нечетной. Таким образом, последняя цифра числа N равна 4. Так как $N=k^2$, то при делении N на 3 в остатке может получиться только 0 или 1.

Если остаток от деления N на 3 равен 0, то число N делится на 3 и N делится на 9, и, следовательно, сумма цифр числа исходного числа делится на 9. Из четных цифр только сумма $4+0+6+8$ делится на 9, а из всех возможных претендентов $6084, 6804, 8064, 8640$ только число 6084 является полным квадратом ($6084=4\cdot 1521=4\cdot 9\cdot 169$).

Если остаток от деления N на 3 равен 1, то остаток от деления суммы цифр числа N на 3 тоже равен 1. Из четных цифр только сумма $4+0+6$ дает в остатке 1 при делении на 3, а из всех возможных претендентов $604, 64,$ только число 64 является полным квадратом. Ответ: 6084; 64.

Комментарии к главе 2:

2.1. Если a делится на $42=2\cdot 3\cdot 7$, то $a=2^x\cdot 3^y\cdot 7^z\cdot p$, а число делителей a равно $N(a)=(1+x)(1+y)(1+z)(1+t)=42=2\cdot 3\cdot 7$. Но число 42 имеет только три множителя, поэтому $p=1$, а степени простых сомножителей равны одному из чисел $2, 3, 7$. Возможны 6 вариантов: $(1+x, 1+y, 1+z)$ – перестановка трех чисел $(2, 3, 7)$.

2.2. Решение аналогично предыдущему: a делится на $10 = 2 \cdot 5 \Rightarrow$ $a = 2^x \cdot 5^y \cdot p$, $N(a) = (1+x)(1+y)(1+t) = 15 = 5 \cdot 3$. Число 15 имеет только два множителя, поэтому $p = 1$, а степени простых сомножителей равны одному из чисел $5, 3$. Возможны 2 варианта: $a = 2^2 \cdot 5^4 = 2500$, $a = 2^4 \cdot 5^2 = 400$.

2.5. Пусть $n = p_1^x p_2^y p_3^z \ldots$, тогда число делителей числа n равно $N(n) = (1+x)(1+y)(1+z)\ldots = 6 = 2 \cdot 3$. Значит n имеет всего 2 простых делителя, степени 1 и 2. Сумма всех делителей числа n равна $(1+p_1)(1+p_2+p_2^2) = 3500 = 4 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 7$. Так как p_1, p_2 – простые, то $p_1 \neq 2$, $p_1 + 1$ – четное, а $1 + p_2 + p_2^2$ – нечетное. Возможны варианты:

$(1+p_1)(1+p_2+p_2^2) = 500 \cdot 7 = 100 \cdot 35 = 20 \cdot 175 = 28 \cdot 125 = 140 \cdot 25$
$= 700 \cdot 5$.

В первом случае $1 + p_1 = 500$, $1 + p_2 + p_2^2 = 7 \Rightarrow p_1 = 499$, $p_2 = 2$, а в остальных случаях простых чисел с такими условиями не существует.

2.8. Пусть $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ – различные простые множители. Тогда число делителей числа n выражается формулой $N(n) = (1+k_1)(1+k_2)\ldots.(1+k_s)$ и из условия задачи следует равенство $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s} = N^2(n) = (1+k_1)^2 (1+k_2)^2 \ldots.(1+k_s)^2$, где $(1+k_1)$, $(1+k_2)$, ,$(1+k_s)$ – различные простые множители.

Однако число делителей числа $(1+k_1)^2(1+k_2)^2\ldots.(1+k_s)^2$ равно 3^s.

Т.е. исходное число имеет вид $n = 3^k = (1+k)^2 \Rightarrow k = 2$, $n = 9$.

2.9. Пусть $N = p_1 \cdot p_2 \cdot ... p_n$ делится на произведение $N = p_1 \cdot p_2 \cdot ... p_n \div (p_1 - 1), (p_2 - 1), (p_3 - 1), ..., (p_n - 1),$ где $p_1 < p_2 < p_3 < .. < p_n -$ простые числа, причем, $p_1 - 1 = 1,$ а $(p_2 - 1), (p_3 - 1), ..., (p_n - 1)$ $-$ четные числа. Значит $p_1 = 2,\ p_2 - 1 = 2, p_3 - 1 = 6, p_4 = 42 \Rightarrow N = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 \cdot p_5 ... =$ $= 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 42.(p_5 - 1).$ Далее, $p_5 -$ простое число, $p_5 - 1 -$ четное и может быть равно одному из чисел: $43 \cdot 2, 43 \cdot 3 \cdot 2, 43 \cdot 7 \cdot 2, 43 \cdot 21 \cdot 2.$ Однако во всех этих случаях p_5 не является простым числом.

2.10. *НОК* всех чисел равно $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7,$ следовательно, простые делители $2, 3, 5, 7$ входят в разложение всех чисел в степени не выше первой. Если $p -$ наименьшее число из $A,$ то любое число из A имеет с $p \neq 1$ общий делитель. Произведение всех чисел не является полным квадратом и делится на $1920 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow$ это числа $6, 10, 14, 30, 42, 70, 210, 105.$ Набор $2, 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210$ условию задачи не удовлетворяет (произведение этих чисел полный квадрат).

2.11. Дробь сократима, если $\dfrac{7n^2 + 11n + 4}{6n^2 + 5n} = \dfrac{p \cdot m}{p \cdot k},$ т.е. у числителя и знаменателя есть общий делитель. Заметим, что $\dfrac{7n^2 + 11n + 4}{6n^2 + 5n} = \dfrac{(n+1)(7n+4)}{n(6n+5)}.$ Дробь будет сократима, если у сомножителей в числителе и знаменателе найдутся общие делители. Вычислим:

$НОД(n+1, n) = 1;\ НОД(n, 7n+4) = (n, 4);$

$НОД(6n+5, n+1) = (-1; n+1) = (-1; n) = 1;$

$НОД(6n+5,\ 7n+4) = (5n+5, n-1) = (11,\ n-1).$

Легко заметить, что при $n=2p$ или $n-1=11p$ не все *НОД* равны единице и дробь можно сократить на 2 или $11.$ будет

2.12. Так как при всех натуральных n верно неравенство $n^2+2>2n-1,$то $x=\dfrac{p}{q}>1.$ Из уравнения следует, что $(n^2+2)^q=(2n-1)^p$, а из единственности разложения на простые множители следует, что числа $2n-1$ и n^2+2 имеют одинаковые простые делители, т.е. число n^2+2 делится на $2n-1.$

$$n^2+2=(2n-1)\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{9}{4} \Rightarrow \frac{n^2+2}{2n-1}=\frac{n}{2}+\frac{1}{4}+\frac{9}{4(2n-1)}.$$

Если выражение справа – целое число, то $4\cdot\dfrac{n^2+2}{2n-1}=2n+1+\dfrac{9}{(2n-1)}$ тоже целое число, а это возможно только при $n=1,\ 3,\ 5.$ Проверим все эти числа: $n=1,\ 2n-1=1;$ $n=3,\ \dfrac{n^2+2}{2n-1}=\dfrac{11}{5};$ $n=5,\ \dfrac{n^2+2}{2n-1}=\dfrac{27}{9}=3.$ Ответ: $n=5.$

Комментарии к главе 3:

3.1. Докажем, что $n<5.$ Если $n\geq 5,$ то левая часть равенства $1+2!+3!\ldots+n!\equiv 1+2!+3!+4!(\mathrm{mod}5)\equiv 3(\mathrm{mod}5),$ а при делении на 5 правой части равенства (квадрата натурального числа) в остатке будет только $0,1,4.$ Осталось проверить числа $n=1,2,3,4.$

3.2. Докажем, что $n<5.$ Если $n\geq 5,$ то левая часть равенства $13+5n+n!\equiv 3(\mathrm{mod}5),$ а при делении на 5 правой части равенства (квадрата натурального числа) в остатке может получиться только $0,1,4.$ Проверяем числа $n=1,2,3,4.$

3.3. Докажем, что $n<3$. Если $n\geq 4$, то левая часть уравнения всегда делится на 4, а правая часть при делении на 4 даст остаток 1 или 2. Рассмотрим случаи $n=1,2,3$: $n=1(1+4-9\neq k^2)$, $n=2\,(2+8-9=1)$, $n=3(6+12-9=9)$.

3.4. Докажем, что $n\leq 4$. Если $n\geq 5$, то левая часть уравнения $12\,n!+11^n-1+3=12\,n!+10\,(11^{n-1}+...+1)+3$ всегда даст в остатке 3 при делении на 5, а правая часть уравнения (квадрат натурального числа) при делении на 5 даст в остатке $0, 1$ или 4. Рассмотрим все случаи: $n=1(12+11+2=25=5^2)$, а при $n=2,3,4\,(12n!+11^n+2\neq k^2)$,

3.5. Заметим, что $k=0, n=\pm\,2$ являются решением. Если $k<0$, то $1+2^k+2^{2k+1}<2$ и, следовательно, уравнение не имеет решений. При $k=1$ уравнение не верно. Пусть $k\geq 2$. Если $k-$ четное, то остаток от деления левой части уравнения на 3 равен 1, а если $k-$ нечетное, то остаток при делении на 3 левой части равен 2. Однако, при делении квадрата целого числа на 3 в остатке не может получиться 2, поэтому, $k-$ четное число. Пусть $k=2p, n=2m+1$ а уравнение будет иметь вид $1+4^p+2\cdot 4^{2p}=n^2=4m^2+4m+1$.

Отсюда, $4^{p-1}(1+8\cdot 4^{p-1})=m\,(m+1)$. Только одно из двух чисел m, $m+1$ четное и оно должно делиться на 4^{p-1}. Пусть $m=4^{p-1}\cdot d$, причем число $d-$нечетное.

Тогда $4^{p-1}(1+8\cdot 4^{p-1})=4^{p-1}\cdot d\,(4^{p-1}\cdot d+1)\Rightarrow$ $1+8\cdot 4^{p-1}=d\,(4^{p-1}\cdot d+1)\Rightarrow$ $4^{p-1}(8-d^2)=d-1\Rightarrow 8-d^2>0\Rightarrow d=1\Rightarrow\varnothing$.

Пусть $m+1=4^{p-1}\cdot d$. Тогда уравнение имеет вид $4^{p-1}(1+8\cdot 4^{p-1})=(d\cdot 4^{p-1}-1)\cdot d\cdot 4^{p-1} \Rightarrow 1+8\cdot 4^{p-1}=d^2\cdot 4^{p-1}-d \Rightarrow$ $4^{p-1}(d^2-8)=d+1.$ Если $d=3,$ то $p-1=1$ и $k=4, n=\pm\ 23.$

Если $d>3,$ то $d^2-8>d+1$ и уравнение не имеет решений.

Ответ: $k=0,\ n=\pm 2;\ k=4,\ n=\pm 23.$

3.6. Обыграем четность чисел:

$2xy = x^2+2y \Rightarrow x=2p \Rightarrow 2py = 2p^2+y \Rightarrow y=2k.$

$2pk=p^2+k \Rightarrow k=pt \Rightarrow pt=p+t \Rightarrow t=pn \Rightarrow pn=1+n \Rightarrow n=1, p=2.$

3.7. $m^4-2n^2=1 \Rightarrow 2n^2=m^4-1 \Rightarrow n-$ четное, а $m-$ нечетное. $m^4+n^4=n^4+2n^2+1=(n^2+1)^2 \Rightarrow n^4=(n^2+1-m^2)(n^2+1+m^2).$ Если $1-m^2<0,$ то $n^2+1-m^2<n^2$ и n^2+1+m^2 делится на $n^2,$ а, следовательно, $1+m^2$ должно делиться на 4, что невозможно. Следовательно, $1-m^2=0 \Rightarrow m=\pm 1, \Rightarrow n=0.$

3.8. $2^x=y^2-1=(y-1)(y+1) \Rightarrow$ числа $y-1, y+1$ степени 2, т.е. $y-1=2^p, y+1=2^p+2 \Rightarrow 2^x=2^p(2^p+2).$ Если $p\geq 2,$ то $2^{x-1}=2^p(2^{p-1}+1) \Rightarrow 2^{p-1}=1 \Rightarrow p-1=0 \Rightarrow p=1 \Rightarrow 2^x=8.$

3.9. Натуральное число x^2 при делении на 3 дает в остатке 0 или 1, а при $n>0$ левая часть при делении на 3 даст в остатке 2. Значит $n=0, x^2=9.$

3.10. Одно решение получается сразу: $n=0, k=2006.$ Докажем, что других решений нет. Если $n>0,$ то $2^n(1+2^n+\ldots+2^{n(k-1)})=2\cdot 1003 \Rightarrow 2^n=2,\ 1+2+\ldots+2^{k-1}=1003 \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{2^k-1}{2-1}=1003.$ Однако, последнее уравнение не имеет решений.

3.11. Решение аналогично предыдущему: $n=0, k=2010.$

При $n>0$,

$$3^n(1+3^n+...+3^{n(k-1)})=3\cdot 670 \Rightarrow 3^n=3,\ 1+3+...+3^{k-1}=670 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{3^k-1}{3-1}=670.$ Однако последнее уравнение не имеет решений.

3.12. $xy=13(x+y) \Rightarrow xy-13x-13y+169-169=0.$

$(x-13)(y-13)=169 \Rightarrow x-13=169, y-13=1 \vee [-13=13, y-13=13.$

36. $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{25} \Rightarrow mn-25(m+n)=0 \Rightarrow (m-25)(n-25)=625.$

Так как $m>n,$ то $m-25>n-25$ и возможны варианты: $m-25=625,\ n-25=1; m-25=125, n-25=25.$

3.16. Из уравнения видно, что правая часть всегда нечетная, а левая будет нечетной, если одно число больше единицы, а другое – равно единице.

Пусть $x=1 \Rightarrow y!=10z+12 \Rightarrow y<5 \Rightarrow y=2, z=-1.$ Если $y\geq 5,$ то 12 разделится на 10 без остатка.

3.18. Если $x<y,$ то правая часть исходного равенства делится на $x+1,$ а левая – нет: $x!(1+(x+1)(x+2)....y)=x!\ (x+1)(x+2)....(x+y).$

Значит $x=y \Rightarrow 2\cdot x!=(2x)! \Rightarrow 2=(x+1)(x+2)\cdots(2x) \Rightarrow x+1=2.$

Почему других нет?

3.19. Из условия задачи следует, что $m>n,\ m>k.$ Рассмотрим три случая: $1)\,k>n; 2)\,k<n; 3)\,k=n.$

1)Если $k>n,$ то левая часть уравнения делится на $k!,$ а правая – нет.

2) Если $k<n,$ то, сократив обе части равенства на $k!,$ получим равенство $5=(k+1)(k+2)..m-(k+1)(k+2)..n.$ Отсюда следует, что $k+1=5,\ n=5,\ 2\cdot 5!=m! \Rightarrow \varnothing.$

3) Если $k=n$, то $6\cdot k!=m!=k!\cdot(k+1)(k+2)\ldots m\Rightarrow$ $6=(k+1)(k+2)\ldots m\Rightarrow k+1=2,\ k=n=1, m=3$ или $m=6, k=n=5.$

Ответ: $m=3, k=n=1;\ m=6, k=n=5.$

3.21. Пусть $n\ge k\ge m, p>n.$ Тогда $(n+1)!\le p!=n!+k!+m!\le 3n!,$ что невозможно при $n>3.$ Если $n\le 3,$ то возможен только один вариант $n=k=m=2, p=3.$

3.22. Из уравнения $k!=5\cdot m!+12\cdot n!$ следует, что $k>m,\ k>n.$ Пусть $s=\max(m;\ n),\ k=s+p.$ Тогда $(s+p)!=5\cdot m!+12\cdot n!<17s!$ и $(s+1)(s+2)\ldots(s+p)<17.$ Откуда следует, что $p<3,$ иначе $(s+1)(s+2)(s+3)>2\cdot 3\cdot 4=24.$ Рассмотрим два случая: $p=1, k=s+1$ и $p=2, k=p+2.$

1.1. $p=1, k=s+1, n=m=s\Rightarrow(n+1)n!=17n!\Rightarrow n+1=17, n=16.$

1.2. $p=1, k=s+1, m=s>n\Rightarrow(m+1)m!=5m!+12n!\Rightarrow(m-4)m!=12n!.$

Отсюда следует, что $m\ge 5;\ 12n!=(m-4)m!>(m-4)(m)n!\Rightarrow 12>(m-4)m\Rightarrow m=5, m=6.$

Если $m=5\Rightarrow 12n!=5!\Rightarrow 12n!=120\Rightarrow n!=10\Rightarrow\varnothing.$

Если $m=6\Rightarrow 12n!=2\cdot 6!\Rightarrow n!=120\Rightarrow n=5\Rightarrow m=6, k=7.$

1.3. $p=1, k=s+1, n=s>m\Rightarrow(n+1)n!=5m!+12n!\Rightarrow(n-11)n!=5m!.$

Отсюда $n\ge 11;\ 5m!=(n-11)n!>(n-11)\cdot n\cdot m!\Rightarrow 5>(n-11)n\Rightarrow\varnothing.$

3.24. $y^2=16+z^x\Rightarrow z^x=y^2-16=(y-4)(y+4)=p\cdot(p+8).$ Так как $z-$простое, то $p=1,$ либо $p=z^k.$ Если $p=1,$ то $p+8=9=3^2, y^2=16+9=25=5^2.$

Если $p=z^k$, то $z^x=z^k(z^k+8).$ Значит, простое число z в некоторой степени делит число 8 $\Rightarrow z^k=2\Rightarrow z^k+8=10,$ что невозможно. Или $z^x=8\Rightarrow z^k+8=16\Rightarrow z^x=8\cdot 16=144=12^2.$

3.25. Справедливо равенство $n^5+n^4+1=(n^2+n+1)(n^3-n+1).$ Отсюда $7^m=(n^2+n+1)(n^3-n+1).$ Легко заметить, что при $n=2$

$n^2+n+1=7,\ n^3-n+1=7,$ т.е. пара $n=2, m=2$ – решение. Докажем, что других решений нет. Пусть $n\geq 3,$ тогда $n^2+n+1>1,\ n^3-n+1>1$ и $7^p=n^2+n+1,\ 7^q=n^3-n+1.$ Отсюда $7^p-1=n(n+1),\ 7^q-1=n(n^2-1)\Rightarrow 7^p-1=(7^q-1)\cdot k\Rightarrow$ q делит $p.$ Т.е. $n^3-n+1=7^p=7^{q\cdot t}=(n^2+n+1)^t.$

Однако, $(n^2+n+1)^2>(n^3-n+1),$ т.е. $1<t<2,$ однако это неверно. Следовательно, других решений нет. **3.26.** Перепишем исходное уравнение в виде $m\,(n^2-1)=10^5 n.$ Заметим, что $m=n=0$ - решение уравнения. Пусть $m,\ n>0.$ Тогда $m(n+1)(n-1)=10^5 n,$ откуда следует, что m делится на $n\,(m=pn).$ Т.е. $p\,(n+1)\,(n-1)=10^5.$ Если n четное, то одно из соседних чисел $n+1,\ n-1$ имеет простой делитель, отличный от $5,$ что невозможно. Значит, $n-$нечетное, а $n+1, n-1-$два соседних четных числа, не имеющих простых делителей кроме 2 и $5.$ Выпишем все такие четные числа $n-1,$ не имеющие простых делителей кроме 2 и $5,$ у которых произведение $(n-1)(n+1)$ не превосходит $10^5.$

2	$2\cdot 5=10$	$2\cdot 25=50$	$2\cdot 125=250$
4	$4\cdot 5=20$	$4\cdot 25=100$	
8	$8\cdot 5=40$	$8\cdot 25=200$	
16	$16\cdot 5=80$		

Легко заметить, что только для чисел $n-1=2, n-1=8$ числа $n+1=4,\ n+1=10$ не содержат простых делителей, кроме 2 и $5.$

Если $n=3,$ то $p=12500,\ m=37500.$

Если $n=9,$ то $p=1250,\ m=11250.$

Ответ: $n=3,\ m=37500$; $n=9,\ m=11250.$

3.27. Левая часть уравнения при делении на 3 дает в остатке 1, следовательно, $k-$ четное число ($k=2p$). Но тогда правая часть уравнения при делении на 4 дает в остатке 1, и, следовательно, $m-$должно быть четным числом ($m=2t$)..

Тогда $4^n=2^{2n}=5^{2p}-3^{2t}=(5^p-3^t)(5^p+3^t)$, откуда $5^p-3^t=2^q$, $5^q+3^t=2^s$ или $5^p=\dfrac{2^q+2^s}{2}$, $3^s=\dfrac{2^q-2^s}{2}=2^{q-1}-2^{s-1}$. Из последнего соотношения следует, что $s-1=0$, а $3^{s-1}=2^{q-1}-1$, $q-1$ четное число, а $3^{s-1}=(2^t+1)(2^t-1)$. Последнее равенство возможно, только если

$2^t-1=1,\ 2^t+1=3\ \Rightarrow t=1,\ s=2, q=2,\ p-1,\ n=m=k=2.$

Ответ: $m=n=k=2.$

3.28. Из уравнения видно, что $2^n\equiv 1(\bmod 3)$, т.е. $n-$ четное число ($n=2p\Rightarrow 2^{2p}=4^p\equiv 1(\bmod 3)$). Далее, $3^m+3\equiv 0\,(\bmod 4)\Rightarrow m-$ четное ($3^{2k}+3=9^k+3\equiv 1+3(\bmod 4)$). Наконец,

$3^{2k}+7=2^{2p}\Rightarrow 7=(2^p)^2-(3^k)^2=(2^p-3^k)(2^p+3^k)=1\cdot 7=7\cdot 1.$

3.29. $3\cdot 2^m=n^2-1=(n-1)(n+1)-$четное число, т.е. $n-$нечетное число. Возможны два варианта представления нечетного числа.

1) $n=2p+1,$ где $p-$нечетное: тогда $3\cdot 2^m=2p(2p+2)=4p(p+1).$ Так, как p нечетное, то p делит $3\Rightarrow p=1\vee p=3.$ Если $p=1,$ то $3\cdot 2^m=4\cdot 1\cdot 2\Rightarrow\varnothing.$ Если $p=3,$ то $3\cdot 2^m=4\cdot 3\cdot 4\Rightarrow m=4.$

2) $n=2^k\cdot p+1,$ где $p-$нечетное. Тогда $3\cdot 2^m=2^k\cdot p(2^kp+2)=2^{k+1}p(2^{k-1}p+1).$ Отсюда следует, что $m=k+1,\ 3=p(2^{k-1}p+1)\Rightarrow\ p=1, k-1=1,\ m=3,\ n=5.$

3.30. Перепишем уравнение в виде: $2^m=3^n+1.$ Попробуем подобрать решение: $m=1\Rightarrow\varnothing; m=2\Rightarrow n=1,$ но других решений не получается. Попробуем доказать, что других решений нет методом «от противного». Пусть $m \geq 3,\ 2^m = 3^n + 1$. Тогда левая часть равенства делится на 8, а правая часть в зависимости от n при делении на 8 дает в остатке 2 или 4. Противоречие.

3.31. Подберем решение: $n = 1 \Rightarrow m = 1;\ n = 2 \Rightarrow m = 3$, но других решений не получается. Докажем методом «от противного», что других решений нет. Пусть $n \geq 3,\ 3^n - 1 = 2^m$. У числа $3^n - 1$ остатки при делении на 8 равны $2, 0, 2, 0\ldots$т.е. $3^n - 1$ делится на 8 только при четных n. Пусть $n = 2k$. Тогда $3^n - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1) = 2^m$, а каждый из сомножителей $3^k - 1$ и $3^k + 1$ являются степенями двойки. Если $3^k - 1 = 2^p$, а $3^k + 1 = 2^q$, то $2 = 2^q - 2^p = 2^p(2^{q-p} - 1)$. Это равенство справедливо только при $q = 2,\ p = 1$. Тогда $k = 1,\ n = 2$. Противоречие с условием $n \geq 3$.

Комментарии к главе 4:

4.1. Пусть $\dfrac{m}{n} < \dfrac{5}{8} < \dfrac{k}{p} \Rightarrow 5n - 8m > 0,\ 8k - 5p > 0.$ Будем искать дробь, ближайшую к $\dfrac{5}{8}$. Разность между двумя дробями $\dfrac{5n - 8m}{8n}$ будет наименьшей, если числитель наименьший, а знаменатель - наибольший. Сведем все к решению диофантовых уравнений $5n - 8m = 1,\ 10 \leq n \leq 99$

$\Rightarrow n = 5 + 8t,\ m = 3 + 5t \Rightarrow t = 11,\ n = 93, m = 58;$

4.2. $\dfrac{96}{35} = \dfrac{3456}{35 \cdot 36},\ \dfrac{97}{36} = \dfrac{3395}{35 \cdot 36} \Rightarrow \dfrac{3395}{35 \cdot 36} < \dfrac{m}{n} < \dfrac{3456}{35 \cdot 36}.$ Среди дробей, знаменатель которых равен $35 \cdot 36 = 5 \cdot 7 \cdot 6^2$, выберем те, у которых числитель и знаменатель имеют общие множители (тогда можно будет сократить на этот множитель и уменьшить знаменатель). Между числами 3395 и 3456 содержится только несколько чисел, пропорциональных $5,6,7$: $3430 = 35 \cdot 98, 3420 = 36 \cdot 95, 3420 = 42 \cdot 81,$ $3444 = 42 \cdot 82.$ Выпишем все дроби с этими числителями и выберем требуемую: $\frac{3420}{36 \cdot 35} = \frac{19}{7}, \frac{3430}{35 \cdot 36} = \frac{49}{18}, \frac{3402}{35 \cdot 36} = \frac{27}{10}, \frac{3444}{35 \cdot 36} = \frac{41}{15}.$

4.3. Последняя цифра числа равна остатку от деления этого числа на 10.

Найдем последнюю цифру числа $11^{10} - 1$: $11^{10} - 1 = (11-1)(11^9 + 11^8 + ... + 11 + 1).$ В этом произведении оба сомножителя делятся на 10, поэтому число $11^{10} - 1$ оканчивается на два нуля.

4.4. Последняя цифра числа 2^n изменяется циклически в зависимости от значения $n: 2, 4, 8, 6, 2...$ Найдем последнюю цифру числа 2^{3^4}: $2^{3^4} = 2 \cdot 2^{3^4 - 1}$, $3^4 - 1 = (9-1)(9+1) = 80.$ $2^4 = 16$ $\Rightarrow 16^n$ оканчивается на $6 \Rightarrow 2^{3^4-1}$ оканчивается на $6 \Rightarrow 2^{3^4}$ оканчивается на 2.

4.5. $2^{999} = \frac{2^{1000}}{2}$. Докажем, что $2^{1000} - 1$ делится на 25.

$2^{20} - 1 = (2^{10} - 1)(2^{10} + 1) = 1025 \cdot 1023 \Rightarrow 2^{1000} - 1 = (2^{20})^{50} - 1 = (2^{20} - 1)(....).$

Т.е. $2^{1000} - 1$ делится на 25 и оканчивается на $00, 25, 75.$ Тогда 2^{1000} может оканчиваться на $01, 26, 76,$ но 2^{1000} делится на 4 и должно оканчиваться на $76.$ Вопрос: Назовите две последние цифры числа $p,$ если известно, что $2p$ оканчивается на 76?

4.6. $\underbrace{11...1}_{2n} - \underbrace{11...1}_{n} = \frac{10^{2n} - 1}{9} + 2\frac{10^n - 1}{9} = \frac{10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1}{9} = \frac{(10^n - 1)^2}{9}.$

4.7. $\underbrace{11...1}_{100}\underbrace{55...56}_{100}=\underbrace{11....1}_{200}+\underbrace{44...4}_{100}+1=\frac{10^{200}-1}{9}+4\frac{10^{100}-1}{9}+1=$

$=\frac{10^{200}+4\cdot 10^{100}+4}{9}=\frac{10^{200}+2\cdot 10^{100}+1+2\cdot 10^{100}+2+1}{9}=$

$=\frac{(10^{100}+1)+2(10^{100}+1)+1}{9}=\frac{(10^{100}+2)^2}{9}$. Наконец, $\frac{10^{100}+2}{3}=$

$=\frac{3\cdot 10^{100}-3+9}{9}=3\cdot\frac{10^{100}-1}{9}+1=\underbrace{33...3}_{100}+1=\underbrace{33....34}_{100}$

4.8. Умножим первую скобку на $9=(10-1)$. Тогда $\frac{1}{9}(10^n+10^{n-1}+...+10)(10-1)(10^{n+1}+5)+1=\frac{1}{9}(10^{n+1}-1)(10^{n+1}+5)+1=$

$=\frac{1}{9}(10^{2n+2}+4\cdot 10^{n+1}+4)=\frac{(10^{n+1}+2)^2}{9}=\left(\frac{10^{n+1}+2}{3}\right)^2$. Остается показать, что последняя дробь является целым числом: $\frac{10^{n+1}+2}{3}=\frac{10^{n+1}-1+3}{3}=\frac{10^{n+1}-1}{3}+1$.

4.9. Первый способ.

$\underbrace{11...1}_{n+1}{}^2=\left(\frac{10^n-1}{3}\right)^2=\frac{10^{n+2}-2\cdot 10^{n+1}-1}{9}=10^{n+1}\cdot\frac{10^{n+1}-1}{9}-\frac{10^{n+1}-1}{9}=$

$\underbrace{11...1}_{n+1}\underbrace{00...0}_{n+1}-\underbrace{11...1}_{n+1}=\underbrace{11...1}_{n}0\underbrace{88...8}_{n}9.$

Второй способ.

$\underbrace{33...3}_{n+1}{}^2=\left(\frac{10^{n=1}-1}{3}\right)^2=\frac{10^{2n+2}-2\cdot 10^{n+1}1}{9}=\frac{10^n-1}{9}\cdot 10^{n+2}+8\cdot\frac{10^{n+1}-1}{9}+1=$

$\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{00...0}_{n+2}+\underbrace{88...8}_{n+1}+1.$

4.10. Первый способ.

$$\underbrace{33...3}_{n}4^2=\left(\frac{10^{n+1}+2}{3}\right)^2 = \frac{10^{n+2}+4\cdot10^{n+1}+4}{9}=\frac{10^{n+2}-1+40\cdot(10^n-1)+45}{9} =$$

$$\frac{10^{2n+2}-1}{9}+40\cdot\frac{10^n-1}{9}+5 = \underbrace{11...1}_{2n+1}+\underbrace{44...4}_{n}0+5=\underbrace{11...1}_{n+1}\underbrace{55...5}_{n}6.$$

Второй способ. Заметим, что если $x=\underbrace{33...3}_{n}4,$ то $3x=1\underbrace{00...0}_{n}2,$ а

$$(3x)^2=1\underbrace{00...0}_{n}4\underbrace{00...0}_{n}.$$

4.11. Первый способ.

$$x=100\underbrace{11...1}_{n}7 = 1\underbrace{00...0}_{n+3}+\underbrace{11...1}_{n+1}+6 = 10^{n+3}+\frac{10^{n+1}-1}{9}+6=\frac{1}{9}(9\cdot10^{n+3}+10^{n+1}+53)=$$

$$\frac{1}{9}\cdot(900\cdot10^{n+1}+10^{n+1}+53)=\frac{1}{9}\cdot(901\cdot10^{n+1}+53)=\frac{1}{9}\cdot(901\cdot10^{n+1}-901-954)=$$

$$\frac{1}{9}\cdot(901\cdot(10^{n+1}-1)+954)=53\cdot\frac{1}{9}\cdot(17\cdot(10^{n+1}-1)+18).$$

Второй способ. Пусть $b_n=100\underbrace{11...1}_{n}7.$ Тогда

$$b_{n+1}=100\underbrace{11...1}_{n+1}7=100\underbrace{11...1}_{n+1}17=b_n\cdot100+17=100\underbrace{11...1}_{n+1}70-70+17=10\cdot b_n-53.$$

Отсюда следует, что если b_n делится на $53,$ то b_{n+1} тоже делится на $53.$ Так как $b_1=10017=53\cdot89,$ то все доказано.

Третий способ. Из предыдущего

$$b_{n+1}-b_n=9\cdot b_n-53= 9\cdot100\underbrace{11...1}_{n}7-53=9\cdot(100\underbrace{11...1}_{n}1+6)-53=9\cdot100\underbrace{11...1}_{n+1}+1=$$

$$900\underbrace{99...9}_{n+1}+1=901\underbrace{00...0}_{n+1}=901\cdot10^{n+1}=53\cdot17\cdot10^{n+1}.$$

4.12. $\underbrace{11...1}_{n}2\underbrace{11...1}_{n}=\underbrace{11...1}_{n+1}\underbrace{00...0}_{n}+\underbrace{11...1}_{n+1}=\underbrace{11...1}_{n+1}\cdot1\underbrace{00...0}_{n-1}1.$

Например, легко заметить, что при нечетных n последнее произведение делится на 11^2.

4.13. $\underbrace{44...4}_{1980}-11\cdot\underbrace{44...4}_{990}+9=4\cdot\dfrac{10^{1980}-1}{9}-11\cdot4\cdot\dfrac{10^{990}-1}{9}+9=\left(\dfrac{2\cdot10^{990}-11}{3}\right)^2.$

Далее, $\dfrac{2\cdot10^{990}-11}{3}=\dfrac{2(10^{990}-1)-9}{3}=2\cdot\underbrace{33...3}_{990}-3=\underbrace{66...6}_{989}3.$

Второй способ. Пусть $a=\underbrace{11...1}_{990}$.

Тогда $\underbrace{44...4}_{1980}-11\cdot\underbrace{44...4}_{990}+9=4a(9a+1)+4a-44a+9=(6a-3)^2.$

4.16. $\overline{ab}+\overline{ba}=11(a+b)\Rightarrow a+b=11.$ Далее, знаменатель исходной прогрессии равен $q=\dfrac{ab}{a}=b>1$ ($b-$ цифра). Из свойства прогрессии получаем

$a\cdot b^2=10a+b+2b^2-b-20$, $a\cdot b^3=10b+a+2b^3-10b-2$.

Отсюда $(2-a)(b^2+10)=0,\ b^3(a-2)=a-2.$ Так как a и b – цифры, то $a=2, b=9.$ Тогда исходная последовательность имеет вид $2, 2\cdot9, 2\cdot9^2,\ 2\cdot9^3.$

4.17. Если числа $2a, 3b, 10a+b-2a, 10b+a+5a-6b$ образуют арифметическую прогрессию, то $b=2a.$ С другой стороны, a, b – цифры, $a-b\le 8$ и $\overline{ab}-\overline{ba}=9(a-b)=p^2.$ Отсюда $a-b=1\Rightarrow a=2, b=2$ или $a-b=4\Rightarrow a=4, b=8,$ а сумма квадратов всех чисел равна 85.

4.20. Пусть $s(a)-$ сумма цифр числа a и по условию задачи $s(a)$ и $s(a+1)$ делятся на 4. Покажем, что число a оканчивается на 9. Если последняя цифра числа a равна $n_0<9,$ то $s(a+1)=s(a)+1,$ а оба этих числа не могут делиться на 4. Таким образом, число a имеет вид $\overline{b9\ldots9},$ где в записи числа стоит k девяток, а последняя цифра числа b не равна 9. Тогда

$s(a)=s(b)+k\cdot 9=4p,\ s(a+1)=s(b)+1=4m.$ Вычтем первое равенство из второго. $9\cdot k-1=4(p-m)\Rightarrow 9\cdot k-4(p-m)=1.$

Если мы найдем решение диофантового уравнения и найдем такие k и n, что $9k-4n=1,$ то в записи числа a после числа b стоит k девяток, а $s(b)+1$ делится на 4. Частным решением этого уравнения являются числа $k=1, n=2$, а общее решение можно записать в виде $k=1+4t,\ n=2+9t.$

При $k=1,\ a=39, 79.$ При $k=5, a=2199999, 1299999, 3099999$ и еще любые числа вида $\overline{b99999},$ у которых $s(b)+1$ делится на 4.

4.21. Решение аналогично решению задачи 92. В этом случае диофантовое уравнение будет иметь вид $9k-5n=1,$ одно из решений которого $k=4, n=7.$ Следовательно, одно из решений будет иметь вид $\overline{b9999},$ где $s(b)+1$ делится на 5. Например, если $b-$ двузначное число, то b может быть одним из чисел $b=21,\ 12,\ 30, 18, 81, 27, 72, 36, 63, 45, 54, 90.$

4.23. $54=2\cdot 3^3, 128=2^7\Rightarrow 128=54\cdot q^n\ (n>0)\Rightarrow q^n=\dfrac{2^6}{3^3}.$ Любой член данной прогрессии может быть записан в виде $N=54\cdot q^m=2^{1+\frac{6m}{n}}\ 3^{3-\frac{3m}{n}}$ и это число будет целым, если $1+\dfrac{6m}{n},\ 3-\dfrac{3m}{n}-$ натуральные числа. Если дробь $\dfrac{m}{n}-$ несократима, то $n-$делитель числа 3.

В результате перебора получим четыре пары чисел n и m: $n=1, m=0; n=1, m=1; n=3, m=1; n=3, m=1; n=3, m=2$ и четыре числа: $54, 72, 96, 128.$

4.24. Первый способ.

$$120\underbrace{33...3}_{n}08=12\cdot10^{n+3}+\frac{10^n-1}{3}\cdot100+8=\frac{1}{3}\cdot(360\cdot10^{n+1}+10^{n+2}-100+24)=$$

$$\frac{1}{3}\cdot(361\cdot10^{n+2}-76)=19\cdot\frac{1}{3}\cdot(19\cdot10^{n+2}-4)=\frac{19}{3}\cdot(19\cdot(10^{n+2}-1)+15).$$

Легко заметить, что число в скобках делится на 3.

Второй способ. $a_1=120308=19\cdot6332$ – делится на 19.

Пусть $a_n=120\underbrace{33...3}_{n}08$. Тогда $a_{n+1}=120\underbrace{33....3}_{n+1}08=120\underbrace{33....3}_{n}000+308=$

$=120\underbrace{33...3}_{n}080+228=10\cdot a_n+228=10\,a_n+19\cdot12$. Так как a_1 делится на 19, то для любого n то a_{n+1} делится на 19.

Содержание

Учебное издание

Делимость целых чисел в задачах

Составитель

Чуваков Валерий Петрович
(chv@uriit.ru)

Югорский физико–математический лицей
г. Ханты–Мансийск, ул. Мира, 151