Физико–математический турнир. Математика.

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

Вариант 1

1. Решите систему неравенств $\begin{cases} \frac{1}{x} \geq \frac{1}{5} \\ \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x^2-4} \geq 0 \end{cases}$.

Решение:

Решим неравенство $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{5}$. Перенесем слагаемые в левую часть и приведем к общему знаменателю, получим $\frac{1}{x} - \frac{1}{5} \geq 0$ и $\frac{5-x}{5x} \geq 0$. Последнее неравенство равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 5-x \leq 0 \\ x<0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq 5 \\ x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 5 \\ x<0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x \leq 5 \\ x \epsilon \emptyset \end{array}\right. \Rightarrow 0 < x \leq 5$. Или можно применить метод интервалов для решения неравенства $\frac{5-x}{5x} \geq 0$. Решение первого неравенства: $x \epsilon\ (0, 5]$.

Решим неравенство $\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x^2-4} \geq 0$. Неравенство равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+2x-3>0 \\ x^2-4>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+2x-3=0 \\ x^2-4 \neq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \epsilon (-\infty, -3) \cup (1, +\infty) \\ x \epsilon (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3; 1 \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \epsilon (-\infty, -3) \cup (2, +\infty) \\ x=-3; 1 \end{array}\right. \Rightarrow x \epsilon (-\infty,\ -3] \cup \{1\} \cup (2,\ +\infty)$.

Решение второго неравенства: $x \epsilon (-\infty,\ -3] \cup \{1\} \cup (2,\ +\infty)$.

Решением системы $\begin{cases} x \epsilon\ (0, 5] \\ x \epsilon (-\infty,\ -3] \cup \{1\} \cup (2,\ +\infty) \end{cases}$ является $x \epsilon\ \{1\} \cup (2,\ 5]$.

Ответ: $x \epsilon\ \{1\} \cup (2,\ 5]$.

Критерии оценивания задания 1

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6	Верно решено первое и второе неравенства, а решение системы неравенств найдено неверно.
5	Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения (ошибки в формуле для вычисления корней квадратного уравнения не являются вычислительными ошибками) или Верно решено второе неравенство системы, а в первом неравенстве получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 5.

4	Верно решено первое неравенство системы, а во втором неравенстве получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 1 и/или -3.
3	Верно решено только одно из неравенств системы.
2	В одном из неравенств получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 1 и/или -3 или 5, а другое неравенство решено неверно.
1	При решении неравенств в ответ включены точки, не входящие в область допустимых значений неравенств.
0	Решение отсутствует или решение неверное, продвижения отсутствуют

2. Постройте график функции $y = \frac{(3x-x^2)\cdot(x-4)}{|x-3|}$ и определите при каких значениях b прямая $y = b$ имеет с этим графиком ровно две общие точки.

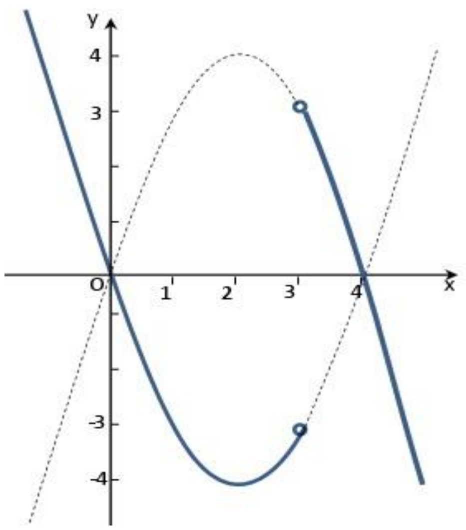
Решение:

При раскрытии модуля получаем два случая:

$$y = \frac{(3x-x^2)\cdot(x-4)}{|x-3|} = \frac{-x(x-3)\cdot(x-4)}{|x-3|} = \begin{cases} -x(x-4), & x > 3 \\ x(x-4), & x < 3 \end{cases} = \begin{cases} -(x-2)^2+4, & x > 3 \\ (x-2)^2-4, & x < 3 \end{cases}.$$

1) Построим часть параболы $y = -(x-2)^2 + 4$ при $x > 3$. Вершина параболы имеет координаты $(2, 4)$, ветви параболы направлены вниз, (0, 0) и (4, 0) - точки пересечения параболы с осью Ox. Граничная точка $(3, 3)$ выколота.
2) Построим часть параболы $y = (x-2)^2 - 4$ при $x < 3$. Вершина параболы имеет координаты $(2, -4)$, ветви параболы направлены вверх, (0, 0) и (4, 0) - точки пересечения параболы с осью Ox. Граничная точка $(3, -3)$ выколота.

График:



Прямая $y = b$ имеет ровно две общие точки с графиком функции $y = \frac{(3x-x^2)\cdot(x-4)}{|x-3|}$, если $b = -4$ или $b \epsilon [-3, 3)$.

Ответ: $b \epsilon \{-4\} \cup [-3, 3)$.

Критерии оценивания задания 2

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6	Верно построен график, для значений параметра b получен ответ, отличающийся от верного исключением точки -3 или включением в ответ точки 3.
5	Верно построен график, для значений параметра b получен ответ, отличающийся от верного исключением точки -4 или для значений параметра b в ответ не включена точка -4 и неверные включения/исключения точек -3 и/или 3.
4	Верно построен график.
3-2	Верно построен график в одном из случаев с применением понятия модуля, верно построена часть графика.
1	Есть продвижения в виде верных фактов о построении квадратичной функции.
0	Решение отсутствует или решение неверное, продвижения отсутствуют.

3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\frac{ax^2+(a-3)x+1}{3x+1}=0$ не имеет корней.

Решение:

Уравнение $\frac{ax^2+(a-3)x+1}{3x+1}=0$ равносильно системе $\begin{cases} ax^2+(a-3)x+1=0 \\ x\neq -\frac{1}{3} \end{cases}$

Рассмотрим уравнение $ax^2+(a-3)x+1=0$.

Если $a=0$, то уравнение будет линейным и примет вид $-3x+1=0$ и $x=\frac{1}{3}$ – корень уравнения.

Если $a\neq 0$, то уравнение является квадратичным; оно не имеет решение, если дискриминант отрицательный или уравнение имеет единственный корень, который равен $x=-\frac{1}{3}$.

Дискриминант $D=(a-3)^2-4a=a^2-10a+9=(a-1)(a-9)<0$ при $a\in(1,9)$.

Уравнение имеет единственный корень $x=-\frac{1}{3}$ когда дискриминант равен 0, то есть $a=1$ или 9, тогда единственный корень равен $x=\frac{3-a}{2a}=-\frac{1}{3}$ при $a=9$.

Ответ: $a\in(1,9]$.

Критерии оценивания задания 3

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6	Не рассмотрен случай $a = 0$, при этом получен верный ответ.
5	Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения (ошибки в формуле для вычисления дискриминанта и корней квадратного уравнения не являются вычислительными ошибками).
3-4	Получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 9 (то есть рассмотрен только случай, когда дискриминант меньше 0 с учетом или без учета условия $a \neq 0$).
1-2	Получен неверный ответ из-за шибок, связанных с применением формул для решения квадратного уравнения, но при этом имеются логичные шаги решения.
0	Решение отсутствует или решение неверное, продвижения отсутствуют.

4. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 1 и в остатке 13. Найдите все такие двузначные числа.

Решение:

Пусть $\overline{ab}$ – двузначное число, где a, b – цифры ($a \neq 0$). Из условия задачи следует, что $\overline{ab} = a \cdot b + 13$ и $a \cdot b > 13$,

$\overline{ab} = 10a + b \Longrightarrow 10a + b = a \cdot b + 13 \Longrightarrow 10a - a \cdot b = 13 - b \Longrightarrow$

$a(10 - b) = 13 - b \Longrightarrow a = \frac{13-b}{10-b} = \frac{10-b+3}{10-b} = 1 + \frac{3}{10-b}$. Так как a, b – цифры и $a \neq 0$, значит $\frac{3}{10-b}$ – натуральное число, тогда 3 делится на $10 - b$, следовательно, $10 - b$ может быть равно только 1 или 3.

Если $10 - b = 1$, тогда $b = 9$, тогда $a = 4$ и двузначное число 49. Если $10 - b = 3$, тогда $b = 7$, тогда $a = 2$ и двузначное число 27.

Или можно после получения равенства $a = \frac{13-b}{10-b}$ выполнить перебор цифр для значения b и найти числа 27 и 49.

Или рассуждать можно так: равенство $10a - a \cdot b = 13 - b$ можно привести к виду $a(10 - b) - (10 - b) = 3$, вынесем общий множитель и получим $(10 - b) \cdot (a - 1) = 3$. a, b – цифры ($a \neq 0$), значит $10 - b > 0$ и $a - 1 > 0$ и так как 3 – простое число, то возможны только следующие варианты: $\begin{cases} 10 - b = 3 \\ a - 1 = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} 10 - b = 1 \\ a - 1 = 3 \end{cases}$, следовательно $\begin{cases} b = 7 \\ a = 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} b = 9 \\ a = 4 \end{cases}$.

Ответ: 27 и 49.

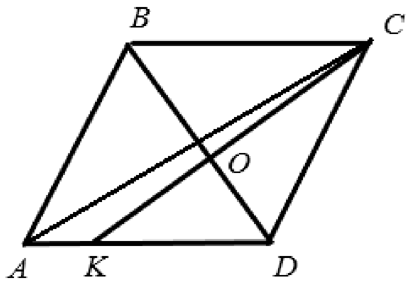
Критерии оценивания задания 4

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4-3	Верно и обосновано найдено одно из чисел или имеется продвижение в обосновании некоторых ограничений на перебор чисел.
2-1	Дан только ответ, решение не обосновано или не приведено.
0	Решение отсутствует или решение неверное, продвижения отсутствуют.

5. Прямая, проходящая через вершину *C* параллелограмма *ABCD,* пересекает сторону *AD* и делит площадь параллелограмма в отношении $7:3$. В каком отношении эта прямая делит диагональ *BD?*

Решение:

1. *ABCD* – параллелограмм, прямая *CK* делит площадь параллелограмма так, что $S_{ABCK}:S_{\Delta KCD}=7:3$. Тогда обозначим площади $S_{ABCK}=7S$, $S_{\Delta KCD}=3S$, значит площадь параллелограмма *ABCD* равна $S_{ABCD}=10S$, тогда площадь треугольника $S_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=5S$, а площадь треугольника $S_{\Delta ACK}=S_{\Delta ACD}-S_{\Delta KCD}=5S-3S=2S$.



2. $\frac{S_{\Delta ACK}}{S_{\Delta KCD}}=\frac{2S}{3S}=\frac{2}{3}$. С другой стороны, $\frac{S_{\Delta ACK}}{S_{\Delta KCD}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot h\cdot AK}{\frac{1}{2}\cdot h\cdot KD}=\frac{AK}{KD}=\frac{2}{3}$, где h - высота, проведенная к AD из точки C, тогда обозначим $AK=2x$, $KD=3x$ и $AD=BC=AK+KD=5x$. Получили, что отношение $\frac{BC}{KD}=\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}$.

3. Другой способ найти отношение $\frac{BC}{KD}$: $ABCK$ – трапеция с основаниями AK и BC, h - высота трапеции $ABCK$ и высота ΔKCD, тогда

$\frac{S_{\Delta KCD}}{S_{ABCK}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot h\cdot KD}{\frac{1}{2}\cdot h\cdot (AK+BC)}=\frac{KD}{AK+BC}=\frac{KD}{(BC-KD)+BC}=\frac{KD}{2BC-KD}=\frac{3}{7}$, следовательно

$7KD=3\cdot(2BC-KD)$, то есть $6BC=10KD$, значит $\frac{BC}{KD}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$.

4. Пусть точка O – точка пересечения прямой CK и диагонали BD. Треугольники COB и KOD подобны по двум углам ($\angle COD = \angle KOD$ как вертикальные, $\angle OCB = \angle OKD$ как накрест лежащие при параллельных прямых), тогда $\frac{BO}{OD} = \frac{BC}{KD} = \frac{5}{3}$.

Ответ: $BO : OD = 5 : 3$.

Критерии оценивания задания 5

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Верно найдено, в каком отношении прямая, проходящая через вершину *C* параллелограмма *ABCD,* делит сторону *AD.*
1-2	Имеются некоторые продвижения в решении, но преобразования и выводы содержат существенные ошибки или не доведены до конца.
0	Решение отсутствует или решение неверное, продвижения отсутствуют.

Вариант 2

1. Решите систему неравенств $\begin{cases} \frac{1}{x} \geq \frac{1}{6} \\ \frac{\sqrt{x^2+3x-10}}{x^2-9} \geq 0 \end{cases}$.

2. Постройте график функции $y = \frac{(x^2-2x)\cdot(x-3)}{|x-2|}$ и определите при каких значениях a прямая $y = a$ имеет с этим графиком ровно две общие точки.

3. Найдите все значения b, при каждом из которых уравнение $\frac{b\,x^2+(b+3)x-1}{x-1} = 0$ не имеет корней.

4. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 1 и в остатке 17. Найдите все такие двузначные числа.

5. Прямая, проходящая через вершину *D* параллелограмма *ABCD,* пересекает сторону *BC* и делит площадь параллелограмма в отношении $7:5$. В каком отношении эта прямая делит диагональ *AC?*

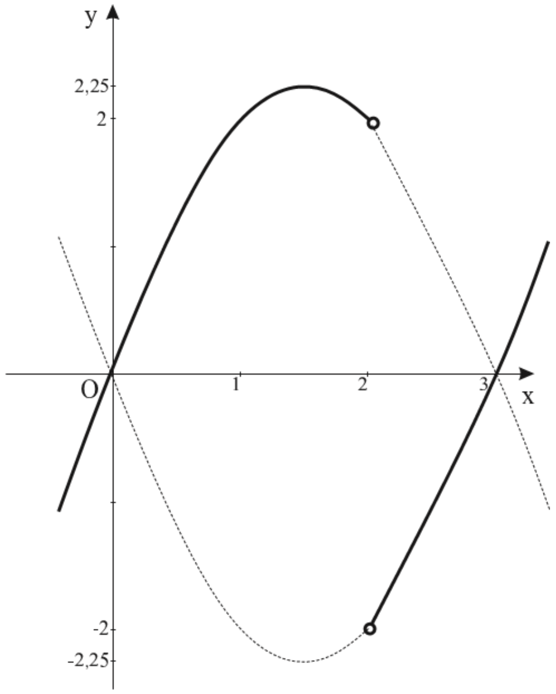
ОТВЕТЫ Вариант 2

1. $x\epsilon\, \{2\} \cup (3,\ \ 6]$.

2. $y = \frac{(x^2-2x)\cdot(x-3)}{|x-2|} = \begin{cases} x(x-3), & x > 2 \\ -x(x-3), & x < 2 \end{cases} = \begin{cases} \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}, & x > 2 \\ -\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}, & x < 2 \end{cases}.$

$a\ \epsilon(-2, 2] \cup \left\{\frac{9}{4}\right\}$.

График:



3. $b\epsilon\ (-9, -1]$.

4. 89.

5. 6: 5