Физико–математический турнир. Математика.

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

Вариант 3

1. Решите систему неравенств $\begin{cases} \frac{3}{x-3} \le 1 \\ \sqrt{x^2-x-2}\cdot(x^2-1) \le 0 \end{cases}$.

Решение:

Решим неравенство $\frac{3}{x-3} \le 1$. Перенесем слагаемые в левую часть и приведем к общему знаменателю, получим $\frac{3}{x-3} - 1 \le 0$ и $\frac{6-x}{x-3} \le 0$. Последнее неравенство равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6-x\ge 0 \\ x-3<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 6-x\le 0 \\ x-3>0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le 6 \\ x<3 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 6 \\ x>3 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 6 \\ x<3 \end{array}\right. \Rightarrow x\epsilon(-\infty,3)\cup[6,+\infty)$. Или можно применить метод интервалов для решения неравенства $\frac{6-x}{x-3} \le 0$. Решение первого неравенства: $x\epsilon(-\infty,3)\cup[6,+\infty)$.

Решим неравенство $\sqrt{x^2-x-2}\cdot(x^2-1)\le 0$. Область допустимых значений исходного неравенства определяется условием $x^2-x-2\ge 0$, или $x\epsilon(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$. При этом значения $x=-1$ и $x=2$ удовлетворяют исходному неравенству, то есть являются его решениями. Если $x\ne -1; 2$, то для всех $x\epsilon(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ $\sqrt{x^2-x-2}>0$ и, следовательно, исходное неравенство для всех таких x равносильно неравенству $x^2-1\le 0$. Таким образом, исходное неравенство равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} x^2-x-2=0 \\ \begin{cases} x^2-x-2>0 \\ x^2-1\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1;2 \\ \begin{cases} x\epsilon(-\infty,-1)\cup(2,+\infty) \\ x\epsilon[-1,\ 1] \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1;2 \\ x\epsilon\emptyset \end{array}\right. \Rightarrow$ $x=-1;2$. Решение второго неравенства: $x=-1;2$.

Решением системы $\begin{cases} x\epsilon(-\infty,3)\cup[6,+\infty) \\ x=-1;2 \end{cases}$ является $x=-1;2$.

Ответ: $x\epsilon\,\{-1,2\}$.

Критерии оценивания задания 1

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6	Верно решено первое и второе неравенства, а решение системы неравенств найдено неверно.
5	Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения (ошибки в формуле для вычисления корней квадратного уравнения не являются вычислительными ошибками)

	или Верно решено второе неравенство системы, а в первом неравенстве получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 6.
4	Верно решено первое неравенство системы, а во втором неравенстве получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 2.
3	Верно решено только одно из неравенств системы.
2	В одном из неравенств получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 6, а другое неравенство решено неверно.
1	При решении неравенств в ответ включены точки, не входящие в область допустимых значений неравенств.
0	Решение отсутствует или решение неверное, продвижения отсутствуют

2. Постройте график функции $y = \frac{(x^2-4x)\cdot|x-2|}{2-x}$ и определите при каких значениях a прямая $y = a$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

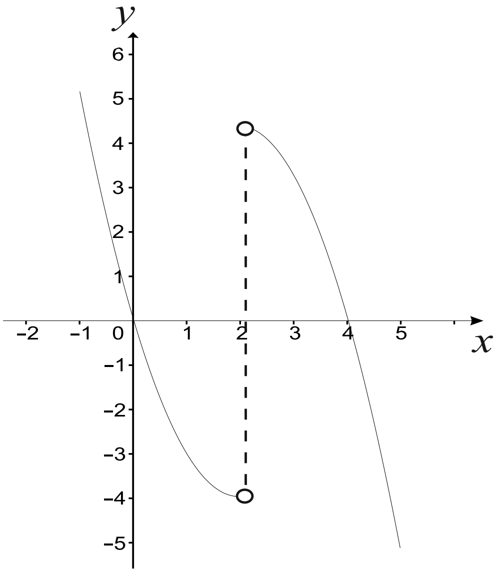
Решение:

При раскрытии модуля получаем два случая:

$$y = \frac{(x^2-4x)\cdot|x-2|}{2-x} = \begin{cases} x^2 - 4x, & x < 2 \\ -x^2 + 4x, & x > 2 \end{cases} = \begin{cases} (x-2)^2 - 4, & x < 2 \\ -(x-2)^2 + 4, & x > 2 \end{cases}.$$

1) Построим часть параболы $y = (x-2)^2 - 4$ при $x < 2$. Вершина параболы имеет координаты $(2, -4)$, ветви параболы направлены вверх, (0, 0) и (4, 0) - точки пересечения параболы с осью Ox. Граничная точка $(2, -4)$ выколота.
2) Построим часть параболы $y = -(x-2)^2 + 4$ при $x > 2$. Вершина параболы имеет координаты $(2, 4)$, ветви параболы направлены вниз, (0, 0) и (4, 0) - точки пересечения параболы с осью Ox. Граничная точка $(2, -4)$ выколота.

График:



Прямая $y = a$ имеет с графиком функции $y = \frac{(x^2-4x)\cdot|x-2|}{2-x}$ ровно одну общую, если $a \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$.

Критерии оценивания задания 2

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-5	Верно построен график, для значений параметра a получен ответ, отличающийся от верного исключением точки -4 и/или точки 4.
4	Верно построен график.
3-2	Верно построен график в одном из случаев с применением понятия модуля, верно построена часть графика.
1	Есть продвижения в виде верных фактов о построении квадратичной функции.
0	Решение отсутствует или решение неверное, продвижения отсутствуют.

3. Найдите значения параметров a и b, при которых график функции $y = ax^2 - 2ax + b$ проходит через точку с координатами $(0,\ 2)$ и имеет ровно одну общую точку с осью Ox.

Решение:

Если $a = 0$, то графиком функции $y = ax^2 - 2ax + b$ будет прямая $y = b$ параллельная оси Ox и проходящая через точку с координатами $(0,\ 2)$. В этом случае не выполняется условие задачи, что график функции имеет ровно одну общую точку с осью Ox.

Если $a \neq 0$, то графиком функции $y = ax^2 - 2ax + b$ является парабола. По условию задачи она должна проходить через точку с координатами $(0,\ 2)$. Подставим координаты этой точки в уравнение функции и получим $2 = a \cdot 0^2 - 2a \cdot 0 + b$, то есть $b = 2$.

Парабола имеет ровно одну общую точку с осью Ox, когда ее вершина лежит на оси Ox, для этого уравнение $ax^2 - 2ax + 2 = 0$ должно иметь единственное решение, тогда дискриминант квадратного уравнения $D = (2a)^2 - 4 \cdot a \cdot 2 = 4a \cdot (a - 2)$ будет равен 0. Получаем, что $a = 0$ или $a = 2$, но $a \neq 0$, значит $a = 2$.

Или можно рассуждать так: если $a \neq 0$, то парабола $y = ax^2 - 2ax + b$ имеет ровно одну общую точку с осью Ox, когда ее вершина лежит на оси Ox, то есть вершина параболы имеет координаты $(x_в,\ 0)$. $x_в = \frac{2a}{2a} = 1$, тогда, подставив вместо x в равенстве $ax^2 - 2ax + 2 = 0$ $x_в = 1$, получим, что $a = 2$.

Ответ: $b = 2, a = 2$.

Критерии оценивания задания 3

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6	Не рассмотрен случай $a = 0$, при этом получен верный ответ или не обосновано, почему $a = 0$ не входит в ответ.
5-4	Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения (ошибки в формуле для вычисления дискриминанта квадратного уравнения или вершины параболы не являются вычислительными ошибками).
3	Получен ответ, отличающийся от верного включением значения $a = 0$.
1-2	Получен неверный ответ из-за шибок, связанных с применением формул для квадратичного уравнения, но при этом имеются логичные шаги решения или если верно найдено только значение b.
0	Решение отсутствует или решение неверное, продвижения отсутствуют.

4. Произведение цифр двузначного натурального числа больше суммы его цифр на 4. Найдите все такие двузначные числа. Ответ должен быть обоснован.

Решение:

Пусть $\overline{xy}$ – двузначное число, где x, y – цифры ($x \neq 0$).

Из условия задачи следует, что $x \cdot y = x + y + 4$. Запишем это равенство в виде $x \cdot y - x = y + 4$, тогда $x \cdot (y - 1) = y + 4$ и $x = \frac{y+4}{y-1}$ (разделить на $(y - 1)$ можно, так как $y - 1 \neq 0$, иначе бы $0 = 5$).

Выделим в выражении $x = \frac{y+4}{y-1}$ целую часть: $x = \frac{y+4}{y-1} = \frac{y-1+4+1}{y-1} = 1 + \frac{5}{y-1}$.

Так как x, y – цифры, то дробь $\frac{5}{y-1}$ должна быть натуральным числом, значит $y - 1$ будет равно 1 или 5. Если $y - 1 = 1$, то $y = 2$, а $x = 1 + \frac{5}{y-1} = 6$, значит двузначное число 62. Если $y - 1 = 5$, то $y = 6$, а $x = 1 + \frac{5}{y-1} = 2$, значит двузначное число 26.

Или можно после получения равенства $x = \frac{y+4}{y-1}$ сделать перебор по значениям, которые может принимать цифра y (это 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) и проверить для этих значений, что x будет цифрой.

Или рассуждать можно так: равенство $x \cdot (y - 1) = y + 4$ можно записать следующим образом $x \cdot (y - 1) - (y - 1) = 5$, далее вынести общий множитель и получить $(x - 1) \cdot (y - 1) = 5$. x, y – цифры ($x \neq 0$) , значит $x - 1 > 0$ и $y - 1 > 0$

и так как 5 – простое число, то возможны только следующие варианты: $\begin{cases} x-1=5 \\ y-1=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-1=1 \\ y-1=5 \end{cases}$, следовательно, $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases}$.

Ответ: 62 и 26.

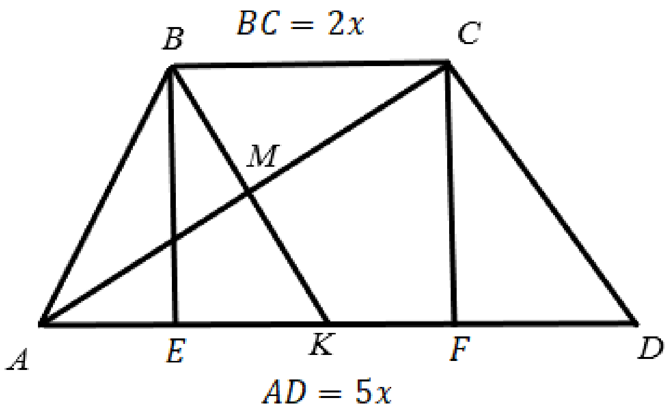
Критерии оценивания задания 4

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4-3	Верно и обосновано найдено одно из чисел или имеется продвижение в обосновании некоторых ограничений на перебор чисел.
2-1	Дан только ответ, решение не обосновано или не приведено.
0	Решение отсутствует или решение неверное, продвижения отсутствуют.

5. Отношение оснований трапеции *ABCD* равно $BC:AD = 2:5$. Через вершину *B* и середину диагонали *AC* провели прямую. В каком отношении эта прямая делит площадь трапеции *ABCD?*

Решение:

1. Пусть точка *M* - середина диагонали *AC*, точка *K* – точка пересечения прямой *BM* и стороны *AD* трапеции и $BC = 2x$, $AD = 5x$.



Треугольники *KAM* и *BCM* равны по 2 признаку равенства треугольников, так как *AM*=*MC*, $\angle AMK = \angle CMB$ как вертикальные, $\angle KAM = \angle BCM$ как накрест лежащие при параллельных прямых *AD* и *BC* и секущей *AC*.

2. Из равенства Δ *KAM* и Δ *BCM* следует, что *AK*=*BC*=$2x$, тогда $KD = AD - AK = 5x - 2x = 3x$.

3. Пусть $BE = CF = h$ - высоты трапеции, проведенные из точек B и C, тогда площадь треугольника ABK равна $S_{\Delta\,ABK} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 2x$, а площадь трапеции $KBCD$ равна $S_{KBCD} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot (KD + BC) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (3x + 2x) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 5x$.
Тогда прямая BK делит площадь трапеции $ABCD$ следующим образом:
$\frac{S_{\Delta\,ABK}}{S_{KBCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot h \cdot 2x}{\frac{1}{2} \cdot h \cdot 5x} = \frac{2}{5}$.
Ответ: $2:5$.

Критерии оценивания задания 5

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Верно найдено, в каком отношении прямая, проходящая через вершину *B* и середину диагонали *AC* трапеции *ABCD*, делит сторону *AD*.
1-2	Имеются некоторые продвижения в решении, но преобразования и выводы содержат существенные ошибки или не доведены до конца.
0	Решение отсутствует ИЛИ Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Вариант 4

1. Решите систему неравенств $\begin{cases} \frac{2}{x-2} \leq 1 \\ \sqrt{x^2 + x - 2} \cdot (x^2 - 1) \leq 0 \end{cases}$.

2. Постройте график функции $y = \frac{(x^2 - 6x) \cdot |x - 3|}{3 - x}$ и определите при каких значениях b прямая $y = b$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

3. Найдите значения параметров a и b, при которых график функции $y = ax^2 + 2ax + b$ проходит через точку с координатами $(0,\ 3)$ и имеет ровно одну общую точку с осью Ox.

4. Произведение цифр двузначного натурального числа больше суммы его цифр на 6. Найдите все такие двузначные числа. Ответ должен быть обоснован.

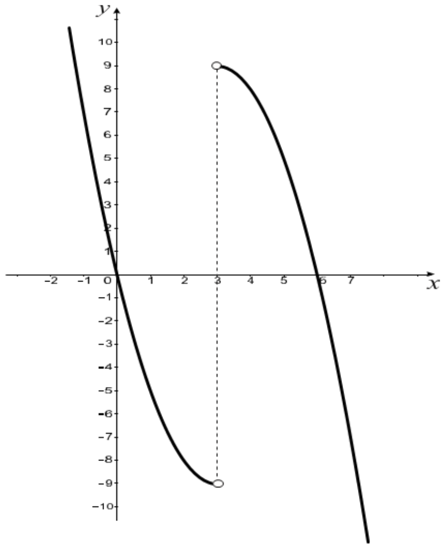
5. Отношение оснований трапеции *ABCD* равно $BC: AD = 2: 7$. Через вершину *C* и середину диагонали *BD* провели прямую. В каком отношении эта прямая делит площадь трапеции *ABCD?*

ОТВЕТЫ Вариант 4

1. $x \epsilon \{-2, 1\}$.

2. $y = \frac{(x^2-6x)\cdot|x-3|}{3-x} = \begin{cases} x^2 - 6x, & x < 3 \\ -x^2 + 6x, & x > 3 \end{cases} = \begin{cases} (x-3)^2 - 9, & x < 3 \\ -(x-3)^2 + 9, & x > 3 \end{cases}$.

График:



Прямая $y = b$ имеет с графиком функции $y = \frac{(x^2-6x)\cdot|x-3|}{3-x}$ ровно одну общую, если $b \, \epsilon(-\infty, -9] \cup [9, +\infty)$.

3. $b = 3, a = 3$.

4. 28 и 82.

5. $7 : 2$