

Физико–математический турнир

Математика

Вариант 1

1. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \frac{1}{x} \geq \frac{1}{5} \\ \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x^2-4} \geq 0 \end{cases}.$$
2. Постройте график функции $y = \frac{(3x-x^2) \cdot (x-4)}{|x-3|}$ и определите при каких значениях b прямая $y = b$ имеет с этим графиком ровно две общие точки.
3. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\frac{ax^2+(a-3)x+1}{3x+1} = 0$ не имеет корней.
4. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 1 и в остатке 13. Найдите все такие двузначные числа.
5. Прямая, проходящая через вершину C параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону AD и делит площадь параллелограмма в отношении 7:3. В каком отношении эта прямая делит диагональ BD ?

Ответы:

- $x \in \{1\} \cup (2, 5]$.
- $y = \begin{cases} -(x-2)^2 + 4, & x > 3 \\ (x-2)^2 - 4, & x < 3 \end{cases}$. При $b \in \{-4\} \cup [-3, 3)$.
- $a \in (1, 9]$.
- 27 и 49.
- 5:3.

Физико–математический турнир

Математика

Вариант 2

1. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \frac{3}{x-3} \leq 1 \\ \sqrt{x^2 - x - 2} \cdot (x^2 - 1) \leq 0 \end{cases} .$$
2. Постройте график функции $y = \frac{(x^2-4x) \cdot |x-2|}{2-x}$ и определите при каких значениях a прямая $y = a$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку.
3. Найдите значения параметров a и b , при которых график функции $y = ax^2 - 2ax + b$ проходит через точку с координатами $(0, 2)$ и имеет ровно одну общую точку с осью Ox .
4. Произведение цифр двузначного натурального числа больше суммы его цифр на 4. Найдите все такие двузначные числа. Ответ должен быть обоснован.
5. Отношение оснований трапеции $ABCD$ равно $BC:AD = 2:5$. Через вершину B и середину диагонали AC провели прямую. В каком отношении эта прямая делит площадь трапеции $ABCD$?

Ответы:

- $x \in \{-1, 2\}$.
- $y = \begin{cases} (x-2)^2 - 4, & x < 2 \\ -(x-2)^2 + 4, & x > 2 \end{cases}$. При $a \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$.
- $b = 2, a = 2$.
- 62 и 26.
- 2:5.

Физико–математический турнир

Математика

Вариант 3

1. Решите неравенство $x - 5 \leq \frac{4}{1-x}$.
2. Постройте график функции $y = \frac{x^3 - 2 \cdot x \cdot |x-1|}{x}$ и найдите, при каком наибольшем значении a графики функций $y = \frac{x^3 - 2 \cdot x \cdot |x-1|}{x}$ и $y = a$ имеют ровно одну общую точку.
3. Найдите, при каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $2x^2 + (1-a) \cdot x - a - 3 = 0$ будет наименьшая.
4. В треугольнике ABC известно, что $BC:AC = 3:5$ и CE – биссектриса угла C . На стороне BC выбрана точка D так, что $BD:DC = 1:2$. В каком отношении биссектриса CE делит отрезок AD ?
5. 11 девушек и n юношей участвовали в соревновании по стрельбе из лука. Всего ими было сделано $(11 \cdot n)$ выстрелов, причем каждый участник соревнования сделал одинаковое количество выстрелов. По сколько выстрелов сделал каждый участник соревнования?

Ответы:

1. $x \in (-\infty, 1) \cup \{3\}$.
2. $y = \begin{cases} (x-1)^2 + 1, & \text{если } x \geq 1 \\ (x+1)^2 - 3, & \text{если } 0 \neq x < 1 \end{cases}$. При $a = -2$.
3. $a = -1$.
4. $AX:XD = 5:2$.
5. $n = 110$, по 10 выстрелов сделал каждый участник.